

Nederlandse organisatie
voor toegepast
natuurwetenschappelijk
onderzoek

TNO-rapport



Fysisch en Elektronisch
Laboratorium TNO

Postbus 96864
2509 JG 's-Gravenhage
Oude Waalsdorperweg 63
's-Gravenhage

Telefax 070 - 328 09 61
Telefoon 070 - 326 42 21

①

rapport no.
FEL-91-B292

exemplaar no.

9

titel

Onderzoek naar de bepaling van
wrijvingscoëfficiënten van een voertuig uit
uitrolcurves

AD-A245 683



Niets uit deze uitgave mag worden
vermenigvuldigd en/of openbaar gemaakt
door middel van druk, fotokopie, microfilm
of op welke andere wijze dan ook, zonder
voorafgaande toestemming van TNO.
Het ter inzage geven van het TNO-rapport
aan direct belanghebbenden is toegestaan.

Indien dit rapport in opdracht werd
uitgebracht, wordt voor de rechten en
verplichtingen van opdrachtgever en
opdrachtnemer verwezen naar de
'Algemene Voorwaarden voor Onderzoeks-
opdrachten TNO', dan wel de betreffende
overeenkomst.

© TNO

auteur(s):

Drs. T.M. Dokoupil

datum: Augustus 1991

DTIC
ELECTE
FEB 04 1992
S D D

This document has been approved
for public release and sale; its
distribution is unlimited.

rubricering

titel

samenvatting

rapporttekst

bijlagen A-C

: ongerubriceerd

: ongerubriceerd

: ongerubriceerd

: ongerubriceerd

92-02814

oplage

aantal bladzijden

aantal bijlagen

: 23

: 59 (incl. bijl., excl. RDP & dist. lijst)

: 3

9 2 2 03 1 73



TDCK RAPPORTENCENTRALE
Frederikkazerne, Geb. 140
van den Burchlaan 31
Telefoon: 070-3166394/6395
Telefax: (31) 070-3166202
Postbus 90701
2509 LS Den Haag

Rapport nr. : FEL-91-B292
Titel : Onderzoek naar de bepaling van wrijvingscoëfficiënten van een voertuig uit
uitrolcurves

Auteur(s) : Drs. T.M. Dokoupil
Instituut : Fysisch en Elektronisch Laboratorium TNO
Datum : Augustus 1991

HDO-opdrachtnummer : A81KL131
Nr. in IWP91 : 707.1
Onderzoek uitgevoerd o.l.v. : Dr. H.F.R. Arciszewski
Onderzoek uitgevoerd door : Drs. T.M. Dokoupil

SAMENVATTING (ONGERUBRICEERD)

Tot de instellingen, noodzakelijk voor het uitvoeren van een rijsimulatie met de Universele Dynamometerbank, behoren de zogeheten K-factoren. Deze K-factoren corresponderen met de wrijvingscoëfficiënten van het voertuig waarmee de rijsimulatie uitgevoerd moet gaan worden. Dit document beschrijft de mathematische problematiek bij de bepaling van geschikte K-factoren instelwaarden voor de voertuigcoëfficiënten uit een uitrolcurve. De bepaling van de K-factoren komt neer op het schatten van parameters van een differentiaalvergelijking.



Accession For	
NTIS CRA&I	<input checked="" type="checkbox"/>
DTIC TAB	<input type="checkbox"/>
Unannounced	<input type="checkbox"/>
Justification	
By	
Distribution/	
Availability Codes	
Dist	Avail and/or Special
A-1	

Report no. : FEL-91-B292
Title : Research into the determination of friction coefficients of a vehicle from deceleration curves

Author(s) : Drs. T.M. Dokoupil
Institute : TNO Physics and Electronics Laboratory
Date : August 1991

NDRO no. : A81KL131
No. in pow '91 : 707.1
Research supervised by : Dr. H.F.R. Arciszewski
Research carried out by : Drs. T.M. Dokoupil

ABSTRACT (UNCLASSIFIED)

→ For simulating a drive of a vehicle on the Universele Dynamometerbank so called K-Factors have to be set. These K-factors correspond with friction coefficients of the vehicle to be simulated. This document describes the mathematical problems involved in the determination of the K-factors from a deceleration curve. The determination of the K-factors is in fact the estimation of parameters of a differential equation. ←

INHOUD

	SAMENVATTING	2
	ABSTRACT	3
1	INLEIDING	6
2	HET FYSISCH MODEL	8
3	ONDERZOEK AAN DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING	11
3.1	Existentie en uniciteit van een oplossing	11
3.2	Continuïteit en differentieerbaarheid van de oplossingen	12
3.3	Oplossingen	13
3.4	Limieten	14
3.5	Partiële afgeleiden	16
4	NORM	17
5	NORMFUNCTIE	19
5.1	Numerieke normfunctie	19
5.2	Exacte normfunctie	20
5.3	Keuze voor de normfunctie	20
6	OPTIMALIZERINGSMETHODEN	21
6.1	IMSL-routine BCONF	21
6.2	IMSL-routine RNLIN	22
6.3	Keuze voor de optimalizeringsmethode	22
7	STARTWAARDENBEPALING	24
7.1	Fysische bepaling van de startwaarden	24
7.2	De kleinste-kwadratenbepaling van de startwaarden	24
7.2.1	Lineaire benadering van de afgeleiden	25

7.2.2	Parabolische benadering van de afgeleiden	25
7.2.3	Methodekeuze voor de benadering van de afgeleiden	26
7.3	Methodekeuze voor de bepaling van de startwaarden	27
7.4	Het fixeren van coëfficiënten	27
7.5	Gevolgen fixeren voor de bepaling van de startwaarden	28
8	CONVERGENTIE EN UNICITEIT	31
9	HET SCHATTERALGORITME	33
10	TESTEN SCHATTERALGORITME	34
10.1	Het doel van de testen	34
10.2	Testprocedure	34
10.3	Testdata	35
10.4	Toelichting beschrijving testresultaten	36
10.4.1	Uitrol1A test	40
10.4.2	Uitrol1B test	42
10.4.3	Uitrol2A test	45
10.4.4	Uitrol2B test	47
10.4.5	Land test	49
10.5	Testconclusies	51
10.6	Gebruikersadviezen	53
11	CONCLUSIE	54
	REFERENTIES	55
Bijlage A	DE METHODE VAN EULER	
Bijlage B	METHODE DER KLEINSTE KWADRATEN	
Bijlage C	HET GEBRUIK VAN VERKORTE UITROLCURVES	

1 INLEIDING

De Universele Dynamometerbank (UDB) is een testbank voor voertuigen met een massa tot 100000 kg. Op de testbank kunnen rijsimulaties uitgevoerd worden. De electromagnetische motoren leveren een snelheidsafhankelijk koppel M op de aandrijfassen van het voertuig dat gegeven wordt door een viertal coëfficiënten, de z.g. K-factoren:

$$(1) \quad M = 12 K_1 + (3/50) K_2 \omega + (3/1000) K_3 \omega^2 + (5/2) K_4 \omega' \quad (\omega \text{ de hoeksnelheid})$$

Een probleem vormt de bepaling van geschikte instelwaarden voor de K-factoren K_1 , K_2 en K_3 , zodat de UDB een realistisch koppel levert. K_4 kan eenvoudig berekend worden als het product van de voertuigmassa, het kwadraat van de dynamische wielradius en een schaafactor. K_1 , K_2 en K_3 corresponderen met wrijvingscoëfficiënten. K_1 en K_2 corresponderen met de rolweerstand. Deze is in werkelijkheid afhankelijk van factoren zoals de samenstelling van de rijbaan, de bandenspanning, de temperatuur de bandensoort en de snelheid. Op empirische wijze is bepaald dat de rolweerstand lineair toeneemt met de snelheid. K_1 correspondeert met de rolweerstand onafhankelijk van de snelheid. K_2 correspondeert met de lineair snelheidsafhankelijke rolweerstand. K_3 correspondeert met de luchtweerstandcoëfficiënt.

Voor de bepaling van de wrijvingscoëfficiënten is een bewegingsvergelijking opgesteld welke het uitrollen van een voertuig modelleert. De oplossing $\omega(t)$ van deze differentiaalvergelijking beschrijft dan de uitrolcurve. K_1 , K_2 en K_3 heten optimaal bepaald te zijn als de differentiaalvergelijking, waarin de waarden van K_1 , K_2 en K_3 gesubstitueerd zijn, een oplossing heeft die zo goed als mogelijk overeenkomt met de gemeten uitrolcurve.

De optimale K_1 , K_2 en K_3 worden bepaald door een normfunctie te optimalizeren met een optimalizeringsmethode.

In het document zal eerst het fysische model beschreven worden. De resultaten van het onderzoek aan de differentiaalvergelijking worden gepresenteerd en een norm wordt gekozen ten opzichte waarvan geoptimaliseerd moet gaan worden. Afhankelijk van de benadering van het fysische probleem kunnen verschillende normfuncties opgesteld worden. Uit deze normfuncties wordt een

keuze gemaakt. Vervolgens worden twee optimalizeringsmethoden besproken, waarvan er één gekozen wordt.

Tot slot worden de resultaten van de optimalizeringsmethode, toegepast op een vijftal gemeten uitrolcurves besproken.

Hieronder volgen enkele conventies, notaties en afkortingen. Een vet gedrukte letter geeft een verzameling aan. Tekst tussen hoekige haken geeft een eenheid aan.

R	verzameling van reële getallen
R^M	M-dimensionale verzameling van reële getallen
$D \subset R^M$	D is een deelverzameling van R^M
A	de effectieve oppervlakte van het voertuig [m^2]
g	de gravitatie constante: $9,8 \text{ m / s}^2$
m	de massa van het voertuig [kg]
r	de dynamische wielradius van een wiel van het voertuig [m]
ρ	de soortelijke massa van lucht: $1,23 \text{ kg / m}^3$
ω	de hoeksnelheid van een wiel van het voertuig [rad / s]
ω'	de eerste afgeleide van de hoeksnelheid naar de tijd [rad / s^2]

2 HET FYSISCH MODEL

Het fysische model is de bewegingsvergelijking van het voertuig. Uit de bewegingsvergelijking en een verzameling meetwaarden kunnen de K-factoren bepaald worden.

Er wordt verondersteld dat een verzameling W^m met N meetpunten beschikbaar is:

$$(2) \quad W^m = \{ (t_i, \omega_i^m) \mid 0 < t_{i-1} < t_i \leq t_{\text{Max}}, i = 2, 3, \dots, N - 1; t_0 = 0; \\ 0 \leq \omega_i^m \leq \omega^{\text{mMax}}, i = 0, 1, \dots, N - 1; \omega_0^m > 0 \}$$

waarbij (t_i, ω_i^m) een meetpunt is en waarbij:

- t_i het tijdstip van de i^{de} meting in seconden na de eerste meting.
- ω_i^m de gemeten hoeksnelheid van een wiel in radialen per seconde op tijdstip t_i .

Opgemerkt zij dat:

- zonder beperking der algemeenheid aangenomen wordt dat de eerste meting gemeten is op tijdstip 0 seconden; dus $t_0 = 0$.
- om te kunnen spreken van een uitrolcurve, ω_0^m positief moet zijn.

De bewegingsvergelijking is een eerste-orde differentiaalvergelijking zonder randvoorwaarde. De bewegingsvergelijking kan op verschillende wijzen geschreven worden.

De fysische bewegingsvergelijking met f_1 , f_2 en c_w :

$$(3') \quad m r^2 \omega' + m g r f_1 + m g r^2 f_2 \omega + A \rho r^3 c_w \omega^2 = 0$$

waarbij:

f_1 de snelheidsonafhankelijke wrijvingscoëfficiënt voorstelt

f_2 de lineair snelheidsafhankelijke wrijvingscoëfficiënt voorstelt

c_w de kwadratisch snelheidsafhankelijke luchtweerstandcoëfficiënt voorstelt

Merk op dat helling, de windsnelheid en -richting niet meegenomen worden in het fysische model.

De mathematische bewegingsvergelijking met a , b en c :

$$(4) \quad \omega' = a \omega^2 + b \omega + c$$

De coëfficiënten a , b en c worden mathematische coëfficiënten genoemd. Vanuit mathematisch standpunt bezien is de schrijfwijze (4) te prefereren aangezien deze het meest compact is.

Voor de interpretatie van de resultaten kunnen de mathematische coëfficiënten het beste omgerekend worden naar fysische coëfficiënten. Voor het maken van de instellingen aan de UDB kunnen a , b en c omgerekend worden naar K_1 , K_2 en K_3 .

Volgens Kraftfahr⁽⁷⁾ is een extra factor 1/2 voor de c_w -waarde gebruikelijk. Dit heeft tot gevolg dat alle c_w -waarden in dit document met 2 vermenigvuldigd moeten worden om realistische waarden te verkrijgen.

De formules om K-factoren en fysische coëfficiënten te berekenen uit de mathematische coëfficiënten volgen hieronder:

$$K_1 = - \frac{m r^2}{12} c$$

$$f_1 = - \frac{r}{g} c$$

$$K_2 = - \frac{50 m r^2}{3} b$$

$$f_2 = - \frac{1}{g} b$$

$$K_3 = - \frac{1000 m r^2}{3} a$$

$$c_w = - \frac{m}{A \rho r} a$$

Een oplossing van een differentiaalvergelijking is niet uniek bepaald zonder randvoorwaarde. Derhalve wordt verlangd dat de oplossing op tijdstip t_0 een (onbekende) hoeksnelheid ω_0 aanneemt:

$$(5) \quad \begin{cases} \omega' &= a \omega^2 + b \omega + c \\ \omega(t_0) &= \omega_0 \end{cases}$$

Merk op dat het aantal onbekende coëfficiënten nu met één is toegenomen !

De 'beste' K-factoren corresponderen met die mathematische coëfficiënten waarvoor de oplossing van stelsel (5) het 'beste' past bij de meetwaardenverzameling W^m .

3 ONDERZOEK AAN DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING

Het eerste doel is het opstellen van een normfunctie, die geoptimaliseerd de 'beste' wrijvingscoëfficiënten oplevert. Daarvoor is onderzoek van differentiaalvergelijking (5) noodzakelijk.

Het blijkt mogelijk te zijn de differentiaalvergelijking (5) op te lossen. Van groot belang voor het toepassen van optimalizeringsmethoden zijn:

- existentie van oplossingen
- uniciteit van een oplossing
- continuïteit van een oplossing
- differentieerbaarheid van een oplossing voor snelle convergentie

3.1 Existentie en uniciteit van een oplossing

M.b.v. een tweetal stellingen is te bewijzen dat de differentiaalvergelijking:

$$(6) \quad \begin{cases} U'(t) &= f(t, U(t)) \\ U(\alpha) &= c_0 \end{cases}$$

een oplossing heeft en dat deze oplossing uniek is.

Aanname I⁽⁷⁾: $D = \{(t, x) \mid \alpha \leq t \leq \alpha + \delta, \|x - c_0\| \leq \gamma\}$, en $f : D \rightarrow \mathbb{R}^M$ is continu ($\delta, \gamma > 0$ en $\|\cdot\|$ een willekeurige norm).

Stelling I⁽⁷⁾: Onder aanname I is er een getal β met $\alpha < \beta \leq \alpha + \delta$, zo dat (6) een oplossing U heeft op het interval $[\alpha, \beta]$.

Aanname II^(?): $D \subset \mathbb{R}^{M+1}$, en $f : D \rightarrow \mathbb{R}^M$, zó dat bij elke begrensde $B \subset D$ een $L (= L_B)$ bestaat met $\|f(t, x) - f(t, \underline{x})\| \leq L \|x - \underline{x}\|$ (voor alle $(t, x), (t, \underline{x}) \in B$).

Stelling II^(?): Onder aanname II bestaat er voor (6) hoogstens één oplossing.

Met $f(t, x) = a x^2 + b x + c$ is het evident dat aan aanname I voldaan kan worden. Er bestaat dus volgens stelling I tenminste één oplossing voor (6).

Met $f(t, x) = a x^2 + b x + c$ is ook voldaan aan aanname II; omdat B begrensd is, is ook L begrensd.

Er bestaat dus volgens stelling II hoogstens één oplossing voor (6).

Dus als a, b, c en ω_0 gegeven zijn, dan bestaat er precies één oplossing voor (6).

3.2 Continuïteit en differentieerbaarheid van de oplossingen

Stelling^(?):

Zij gegeven het stelsel differentiaalvergelijkingen (6) met $f : [\alpha, \beta] \times D \rightarrow \mathbb{R}^M$, en $f \in C^p([\alpha, \beta] \times D)$ (= verzameling van alle p maal continu differentieerbare functies op $[\alpha, \beta] \times D$), dan is de oplossing $U(t)$ van (6) een element van $C^{(p+1)}[\alpha, \beta]$.

Gevolg: als a, b, c en ω_0 gegeven zijn, dan is de bijbehorende oplossing $\omega(t; a, b, c, \omega_0)$ oneindig vaak continu differentieerbaar op een zeker interval $[\alpha, \beta]$. Er geldt immers voor $f(t, x) = a x^2 + b x + c$ dat $f \in C^\infty([\alpha, \beta] \times \mathbb{R})$.

3.3 Oplossingen

De differentiaalvergelijking (5) is oplosbaar, d.w.z. voor vaste coëfficiënten a , b , c en ω_0 kan er een expliciete functie $\omega(t; a, b, c, \omega_0)$ gevonden worden, die voldoet aan de volgende eisen:

- (i) ω is gedefinieerd op een interval $J \subset \mathbb{R}$.
- (ii) $\forall t \in J$ is $(t, \omega(t; a, b, c, \omega_0)) \in [\text{definitiegebied } f(t, x) = a x^2 + b x + c]$
- (iii) $\forall t \in J$ geldt: $\omega' = a \omega^2 + b \omega + c$
- (iv) $\omega(t_0; a, b, c, \omega_0) = \omega_0$

De differentiaalvergelijking (5) is oplosbaar m.b.v. separatie der variabelen. De oplossing van (5) blijkt zich op te splitsen in drie (deel)oplossingen ω_1 , ω_2 en ω_3 . De oplossingen zijn gecontroleerd door substitutie van de oplossingen in de differentiaalvergelijking (5) en door verificatie van $\omega(t_0) = \omega_0$, zowel met de hand als met het symbolische mathematische programma 'Mathematica'.

De oplossingen van differentiaalvergelijking (5) zijn:

$$\begin{aligned} \omega_1[t; a, b, c, \omega_0] = & (\text{Sqrt}[-b^2 + 4 a c] \omega_0 + \\ & 2 c \text{Tan}\left[\frac{\text{Sqrt}[-b^2 + 4 a c] t}{2}\right] + b \omega_0 \text{Tan}\left[\frac{\text{Sqrt}[-b^2 + 4 a c] t}{2}\right]) / \\ & (\text{Sqrt}[-b^2 + 4 a c] - b \text{Tan}\left[\frac{\text{Sqrt}[-b^2 + 4 a c] t}{2}\right] - \\ & 2 a \omega_0 \text{Tan}\left[\frac{\text{Sqrt}[-b^2 + 4 a c] t}{2}\right]) \end{aligned}$$

$$\omega_2[t; a, b, c, \omega_0] = \frac{-(b^2 t + 4 a \omega_0 + 2 a b t \omega_0)}{2 a (-2 + b t + 2 a t \omega_0)}$$

$$\begin{aligned} \omega_3[t; a, b, c, \omega_0] = & -((-2 c + 2 E \sqrt{b^2 - 4 a c}) t \\ & E \sqrt{b^2 - 4 a c} t \quad b \omega_0 + \sqrt{b^2 - 4 a c} \omega_0 + \\ & E \sqrt{b^2 - 4 a c} t \quad \sqrt{b^2 - 4 a c} \omega_0) / \\ & (-b + E \sqrt{b^2 - 4 a c}) t \quad b - \sqrt{b^2 - 4 a c} - \\ & E \sqrt{b^2 - 4 a c} t \quad \sqrt{b^2 - 4 a c} - 2 a \omega_0 + \\ & 2 E \sqrt{b^2 - 4 a c} t \quad a \omega_0)) \end{aligned}$$

Er geldt:

$$(7) \quad \omega[t; a, b, c, \omega_0] = \begin{cases} \omega_1[t; a, b, c, \omega_0] & \text{als } b^2 - 4 a c < 0 \\ \omega_2[t; a, b, c, \omega_0] & \text{als } b^2 - 4 a c = 0 \\ \omega_3[t; a, b, c, \omega_0] & \text{als } b^2 - 4 a c > 0 \end{cases}$$

3.4 Limieten

De afzonderlijke oplossingen zijn continu. ω daarentegen hoeft niet continu te zijn als functie van a, b, c en ω_0 . Het overgangsgebied van de oplossingen ω_1, ω_2 en ω_3 dient daartoe onderzocht te worden.

Het overgangsgebied van de oplossingen is de volgende verzameling punten:

$$\{ (a, b, c, \omega_0) \in \mathbb{R}^4 \mid b^2 - 4 a c = 0 \}$$

Het gedrag van de oplossingen in het overgangsgebied is ook numeriek van belang. De oplossingen kunnen slecht geconditioneerd zijn in het overgangsgebied, d.w.z. mathematisch gezien welgedefinieerd, maar indien geëvalueerd met *floating-point* operaties in absolute waarde extreem groot.

In oplossing ω_1 wordt voor $\tan(x)$ de lineaire term van de Taylorreeks van $\tan(x)$ gesubstitueerd. Substitutie is toegestaan omdat in het overgangsgebied $x = (b^2 - 4ac) * t / 2 \rightarrow 0$.

Oplossing ω_1 herschreven na substitutie van x voor $\tan(x)$:

$$\begin{aligned} & (\text{Sqrt}[-b^2 + 4ac] (2ac t - 2ac t_0 + 2a\omega_0 + abt\omega_0 - abt_0\omega_0)) / \\ & (2a \text{Sqrt}[-b^2 + 4ac] - ab \text{Sqrt}[-b^2 + 4ac] t + \\ & \quad ab \text{Sqrt}[-b^2 + 4ac] t_0 - 2a^2 \text{Sqrt}[-b^2 + 4ac] t\omega_0 + \\ & \quad 2a^2 \text{Sqrt}[-b^2 + 4ac] t_0\omega_0) \end{aligned}$$

De bovenstaande formule met $b^2 / (4a)$ gesubstitueerd voor c blijkt identiek te zijn aan oplossing ω_2 .

Op soortgelijke wijze kan aangetoond worden dat ω_3 identiek is aan oplossing ω_2 , door $1+x$ te substitueren voor e^x (eerste-orde Taylorreeks).

Er geldt dus:

$$(8) \quad \lim_{\gamma} \omega(t; a, b, c, \omega_0) = \omega_2(t; a, b, c, \omega_0)$$

waarbij γ een willekeurig pad is naar een punt waarvoor $b^2 - 4ac = 0$ geldt. (8) geldt voor willekeurige a, b, c, ω_0 . De continuïteit in het overgangsgebied $b^2 - 4ac = 0$ is dus gegarandeerd.

3.5 Partiële afgeleiden

Optimalizeringsmethoden maken veelal gebruik van partiële afgeleiden t.b.v. convergentiesnelheid. De partiële afgeleide van ω naar a blijkt echter niet uniek gedefinieerd te zijn. Dit blijkt uit de berekening van de partiële afgeleiden van ω_1 en ω_3 naar a in het punt ($t = 5$, $a = -1$, $b = -2$, $c = -1$, $\omega_0 = 0$) (In feite is de limiet naar dit punt genomen aangezien ω_1 en ω_3 niet gedefinieerd zijn als $b^2 - 4ac = 0$ en dus zeker ook de partiële afgeleiden niet gedefinieerd zijn). Het niet uniek gedefinieerd zijn van de partiële afgeleide heeft tot gevolg dat snel convergerende optimaliseringstechnieken die gebruik maken van partiële afgeleiden, uitgesloten zijn, aangezien deze technieken verlangen dat de eerste-orde partiële afgeleiden tenminste continu zijn. Verder onderzoek aan de partiële afgeleiden ten behoeve van een snel convergerende optimalizeringsmethode is derhalve niet zinvol.

4 NORM

Om twee verzamelingen coëfficiënten met elkaar te kunnen vergelijken op 'kwaliteit' (welke verzameling coëfficiënten levert een oplossing die het meeste lijkt op de meetwaardencurve) is de introductie van een norm noodzakelijk.

Stel ω is een oplossing behorende bij een parameterverzameling P . Laat Ω de verzameling zijn van alle functies $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ met M het aantal onbekende coëfficiënten in P . Dus $\omega \in \Omega$.

Een voor de hand liggende keuze voor de norm is de som van de kwadratische verschillen:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \omega &\rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} (\omega^{m_i} - \omega(t_i, P))^2 \end{aligned}$$

Andere mogelijkheden zijn:

De som van de absolute verschillen:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\text{som}} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \omega &\rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} |\omega^{m_i} - \omega(t_i, P)| \end{aligned}$$

De maximumnorm:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\text{max}} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \omega &\rightarrow \max_{i=0, \dots, N-1} |\omega^{m_i} - \omega(t_i, P)| \end{aligned}$$

Een minder gebruikelijke norm is de volgende:

$$\|\cdot\|_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (p > 0)$$

$$\omega \rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} |\omega^{m_i} - \omega(t_i, P)|^{1+p}$$

Formeel gezien behoort bij $\|\cdot\|_2$ nog de wortel genomen te worden en bij $\|\cdot\|_p$ de $(1+p)^{\text{de}}$ -machts wortel. Aangezien de norm slechts aangewend wordt voor de vergelijking van oplossingen, spelen de wortels geen rol.

De $\|\cdot\|_{\text{som}}$ valt af als norm omdat deze norm de spreiding van de afwijkingen van de meetwaarden van de oplossing van de differentiaalvergelijking niet minimalizeert.

Omdat veel optimaliseringstechnieken maken gebruik van partiële afgeleiden, of bij het ontbreken daarvan, van 'finite differences' voor de benaderingen van partiële afgeleiden is het niet continu differentieerbaar zijn van $\|\cdot\|_{\text{max}}$ onpraktisch. Er geldt voor optimaliseringstechnieken die gebruik maken van finite differences dat des te meer discontinuïteiten in de partiële afgeleiden, des te kleiner de kans dat er een globaal optimum gevonden wordt. Er is een goed alternatief waardoor de nadelen van $\|\cdot\|_{\text{max}}$ ontweken kunnen worden.

$\|\cdot\|_2$ en $\|\cdot\|_p$ zorgen voor een zo klein mogelijke spreiding van de afwijkingen en leiden tot hetzelfde optimum⁽⁷⁾. $\|\cdot\|_2$ verdient de voorkeur boven $\|\cdot\|_p$ aangezien $\|\cdot\|_2$ minder rekenwerk vergt.

De keus voor de norm valt op: $\|\cdot\|_2$.

5 NORMFUNCTIE

De normfunctie is gedefinieerd als:

$$F(P) = \sum_{i=0}^{N-1} (\omega_i^m - \omega(t_i; P))^2$$

De bepaling van $\omega(t_i; P)$ legt $F(P)$ vast. Er zijn twee manieren om $\omega(t; P)$ te bepalen.

5.1 Numerieke normfunctie

Bij de numerieke normfunctie wordt geen gebruik gemaakt van de exacte oplossingen van (5), maar wordt de functie ω numeriek benaderd. Uitgangspunt voor de numerieke methode is het volgende stelsel:

$$(9) \quad \begin{cases} \omega' = a \omega^2 + b \omega + c \\ \omega(t_0) = \omega_0^m \end{cases}$$

De randvoorwaarde van het stelsel (9) is gelijk aan de eerste gemeten hoeksnelheid van een wiel van het voertuig. Dit gegeven wordt gebruikt voor de numerieke benadering van de functie ω .

Als normfunctie wordt de op $\| \cdot \|_2$ gebaseerde functie F gebruikt:

$$(10) \quad F(a, b, c) = \sum_{i=0}^{N-1} (\omega_i^m - \omega(t_i; a, b, c))^2$$

De a , b en c waarvoor $F(a, b, c)$ minimaal is, zijn de optimale mathematische coëfficiënten.

De functie $\omega(t; a, b, c)$ wordt numeriek benaderd m.b.v. de methode van Euler (Zie bijlage A).

(10) kan verfijnd worden door stelsel (5) als uitgangspunt te nemen en de volgende normfunctie te gebruiken:

$$(11) \quad F(a, b, c, \omega_0) = \sum_{i=0}^{N-1} (\omega^m_i - \omega(t_i; a, b, c, \omega_0))^2$$

De optimale mathematische coëfficiënten zijn die a, b, c en ω_0 , waarvoor $F(a, b, c, \omega_0)$ minimaal is.

De verfijning heeft tot gevolg dat de invloed van een foutje in ω^m_0 verminderd wordt doordat de randwaarde kan variëren.

De functiewaarden van ω kunnen op een willekeurig aantal decimalen precisie berekend worden m.b.v. de methode van Euler door een voldoende kleine stapgrootte te nemen en de bewerkingen uit te laten voeren met voldoende precisie.

5.2 Exacte normfunctie

Deze methode gaat uit van stelsel (5). De normfunctie is (11), waarbij ω bepaald wordt m.b.v. de exacte oplossingen van (5). De a, b, c en ω_0 waarvoor $F(a, b, c, \omega_0)$ minimaal is, zijn de optimale a, b, c en ω_0 .

Merk op dat de exacte normfunctie continu is.

5.3 Keuze voor de normfunctie

De exacte normfunctie verdient de voorkeur boven de numerieke normfunctie omdat indien exacte oplossingen beschikbaar zijn het onzinnig is om numerieke benaderingen uit te voeren, ook al leidt het kiezen voor exacte oplossingen tot meer rekentijd, hetgeen in dit geval overigens niet zo is. Het numeriek benaderen van ω kost meer rekentijd ($O(N^2)$) dan het gebruik van de exacte oplossingen.

6 OPTIMALIZERINGSMETHODEN

Bij de keuze van de optimalizeringsmethode voor het optimaliseren van de normfunctie is het van belang dat de optimalizeringsmethode de optimale coëfficiënten moet kunnen bepalen binnen fysisch vastgestelde intervallen. De intervallen definiëren het zogeheten zoekgebied.

Een tweetal routines wordt beschouwd: BCONF en RNLIN. Deze routines zijn afkomstig van de IMSL library. Beide routines kunnen functies optimaliseren van het volgende type:

$$f: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$$

6.1 IMSL-routine BCONF

De BCONF⁽⁷⁾ optimalizeringsmethode maakt gebruik van een quasi-Newton methode. *Finite differences* worden gebruikt voor de bepaling van de partiële afgeleiden van de normfunctie.

BCONF biedt de mogelijkheid om expliciet intervallen aan te geven, waarbinnen de coëfficiënten moeten liggen. Er wordt niet gegarandeerd dat er binnen het zoekgebied geen andere coëfficiënten te vinden zijn die een beter optimum hebben. Dit probleem behoort eigenlijk onderzocht te worden in een functieonderzoek. Vanwege de complexiteit van de exacte normfunctie (m.n. ten gevolge van de dimensie) en de data-afhankelijkheid is dit analytisch een vrijwel onmogelijke zaak.

De afgewezen numerieke normfunctie biedt als voordeel dat de normfunctie in feite niets anders is dan een data-afhankelijk 4^e-orde polynoom. Het gevolg hiervan is dat de numerieke normfunctie geen singuliere punten heeft (voor iedere willekeurige combinatie van ω_0 , a, b en c is de functiewaarde te berekenen).

De BCONF-routine verlangt zogeheten startwaarden. Dit zijn waarden voor a, b, c en ω_0 die als beginpunt voor het zoekproces door BCONF gebruikt worden. Omdat BCONF niet garandeert dat een globaal optimum gevonden wordt, is het van belang om startwaarden te bepalen die, gesubstitueerd in ω , een zo klein mogelijke norm opleveren.

6.2 IMSL-routine RNLIN

De RNLIN-routine^(?) is speciaal ontwikkeld voor het oplossen van problemen van de volgende vorm:

$$\min_{a_1, \dots, a_M} \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - y(x_i; a_1, \dots, a_M))^2$$

waarbij

$$\{ (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq i \leq N-1 \}$$

gegeven zijn

en a_1, \dots, a_M onbekende, te bepalen coëfficiënten voorstellen.

De voorwaarde voor de toepassing van deze methode is dat functie $y(\cdot)$ bekend en continu is.

Het voordeel van deze methode is, dat het soort problemen dat RNLIN kan oplossen overeenkomt met het UDB-probleem. Nadeel is dat geen expliciete intervallen, waarbinnen de coëfficiënten moeten liggen, aangegeven kunnen worden bij deze routine. Ook RNLIN heeft evenals BCONF goede startwaarden nodig om te kunnen convergeren en ook RNLIN garandeert niet dat er geen betere verzameling coëfficiënten bestaat die een kleinere som van de kwadratische verschillen tot gevolg heeft.

6.3 Keuze voor de optimalizeringsmethode

Ofschoon aan de voorwaarden voor het gebruik van RNLIN en BCONF voldaan is, is enige voorzichtigheid gewenst. De oplossing ω als functie van t , a , b , c en ω_0 is in het gebied rondom $b^2 - 4ac = 0$ welgedefinieerd. Er zijn echter numerieke problemen te verwachten aangezien de formules slecht geconditioneerd zijn. Mathematisch gezien zijn de formules correct, maar ten

gevolge van het werken met *floating-point* nauwkeurigheid kunnen sommige functie-evaluaties tot *overflow* leiden (de noemers van ω_1 en ω_3 gaan naar nul als $b^2 - 4ac \rightarrow 0$). Het is derhalve aan te bevelen om in een gebiedje waarvoor geldt $b^2 - 4ac < \epsilon$ (ϵ een zekere in te stellen constante) de altijd welgedefinieerde ω_2 te nemen. Hierdoor wordt echter kunstmatig een discontinuïteit ingevoerd. Robuustheid is derhalve niet meer gegarandeerd. Door ϵ zo klein mogelijk te kiezen is de kans dat de routine verkeerde resultaten oplevert minimaal.

Een nadeel van RNLIN is dat er geen expliciete grenzen aangegeven kunnen worden voor de coëfficiënten. RNLIN maakt verder geen deel uit van de MATH/IMSL library, maar behoort tot de STAT/IMSL library, die op dit moment niet beschikbaar is. De keuze valt daarom op BCONF.

7 STARTWAARDENBEPALING

Het BCONF-algoritme verlangt van de gebruiker zogeheten startwaarden. Dit zijn waarden voor a , b , c en ω_0 , die als beginpunt voor het zoekproces van BCONF gebruikt worden. Omdat BCONF niet garandeert dat een globaal optimum gevonden wordt, is het zaak om startwaarden te bepalen die, gesubstitueerd in ω , een zo klein mogelijke norm opleveren.

Voor de bepaling van een goede verzameling startwaarden zijn er verschillende methoden.

7.1 Fysische bepaling van de startwaarden

Men kan een aantal verzamelingen op fysische gronden gekozen startwaarden nemen, de bijbehorende normen bepalen en de verzameling startwaarden, die de kleinste norm heeft als invoer gebruiken voor BCONF.

7.2 De kleinste-kwadratenbepaling van de startwaarden

Deze methode gaat uit van de afgeleiden van de gemeten hoeksnelheid naar de tijd. Zij:

$$W^{m'} = \{(t_i, \omega_i^{m'}) \mid 0 < t_{i-1} < t_i \leq t_{\text{Max}}, i = 2, 3, \dots, N - 1; t_0 = 0\}$$

waarbij

- t_i het tijdstip van de i^{de} meting in seconden na de eerste meting.
- $\omega_i^{m'}$ de benaderde eerste afgeleide van de hoeksnelheid naar de tijd op het tijdstip van de i^{de} meting in radialen per seconde kwadraat.

Door de verzameling $W^{m'}$ wordt een 2^e-orde kleinste-kwadraten polynoom gelegd. Vanwege de te verwachten vorm van de uitrolcurve is een benadering van de afgeleide d.m.v. een parabool een

voor de hand liggende keuze. De coëfficiënten van de parabool vormen de startwaarden voor a, b en c. De startwaarde voor ω_0 wordt gelijk gekozen aan de eerste gemeten hoeksnelheid: ω_0^m .

De ω_i^m moeten noodzakelijkerwijs benaderd worden, omdat de verandering in de hoeksnelheid niet gemeten wordt als functie van de tijd. Deze benadering vormt een nieuw probleem en kan op twee manieren worden aangepakt die hieronder worden behandeld.

7.2.1 Lineaire benadering van de afgeleiden

Beschouw de meetpuntenverzameling W^m . De lineaire afgeleide wordt gedefinieerd als:

$$\omega_i^{m'} = \frac{\omega_{i+1}^m - \omega_{i-1}^m}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad i = 1, 2, \dots, N-2$$

en

$$\begin{aligned} \omega_0^{m'} &= \omega_1^{m'} \\ \omega_{N-1}^{m'} &= \omega_{N-2}^{m'} \end{aligned}$$

7.2.2 Parabolische benadering van de afgeleiden

Beschouw de meetpuntenverzameling W^m . De afgeleiden worden benaderd m.b.v. de methode der kleinste kwadraten.

Een groepje van vijf in tijd opeenvolgende meetpunten bepaalt de afgeleide in het middelste (3^e) meetpunt. Op basis van de vijf meetpunten wordt een kleinste kwadraten polynoom bepaald:

$$(12) \quad \omega(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

De afgeleide van de parabool, met voor t de tijd van het middelste meetpunt gesubstitueerd is de benaderde afgeleide van het middelste punt. In formulevorm:

$$\omega_{i'}^m = - \frac{\beta}{2 \gamma} t_i \quad i = 2, 3, \dots, N-3$$

waarbij β en γ de kleinste-kwadraten coëfficiënten zijn van de parabool (12), berekend m.b.v. de meetpuntendeelverzameling:

$$\{(t_j, \omega_j^m) \mid j = i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$$

ω_1^m en ω_{N-2}^m worden lineair benaderd:

$$\omega_i^m = \frac{\omega_{i+1}^m - \omega_{i-1}^m}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad i = 1, N-2$$

Voor de randwaarden geldt tenslotte:

$$\begin{aligned} \omega_0^m &= \omega_1^m \\ \omega_{N-1}^m &= \omega_{N-2}^m \end{aligned}$$

7.2.3 Methodekeuze voor de benadering van de afgeleiden

Om twee redenen is de parabolische benadering van de afgeleiden te prefereren boven de lineaire benadering:

- de lineaire benadering is gevoeliger voor *outliers* dan de parabolische benadering. Bij de parabolische benadering worden voor de benadering van de afgeleide op een zeker tijdstip meer meetwaarden meegenomen dan bij de lineaire benadering.
- een parabool sluit goed aan bij de vorm van de uitrolcurve.

7.3 Methodekeuze voor de bepaling van de startwaarden

De bepaling van de startwaarden m.b.v. de methode der kleinste kwadraten verdient de voorkeur boven de fysische bepaling. De fysische bepaling is in zekere zin te vergelijken met het prikken van startwaarden in een 4-dimensionale ruimte.

T.a.v. de bepaling van de startwaarden m.b.v. de kleinste-kwadraten methode kan opgemerkt worden dat:

- er precies één oplossing is voor α , β en γ van (12) onder de aanname dat de curve niet te benaderen is door een rechte. De aanname is noodzakelijk omdat anders $A^T A$ (zie bijlage B) singulier is. Deze aanname is acceptabel omdat uitrolcurves niet lineair zijn.
- de gevonden coëfficiënten α , β en γ gegarandeerd de kleinste som van de kwadratische verschillen leveren.

7.4 Het fixeren van coëfficiënten

Er kunnen gevallen zijn, waarin het wenselijk is een coëfficiënt een vaste waarde te geven (te fixeren). Indien bijvoorbeeld de c_w -waarde door de fabrikant van het voertuig aangeleverd wordt, zou deze als een constante beschouwd kunnen worden. Misschien blijkt het verder mogelijk te zijn op grond van ervaring een vaste waarde aan de snelheidsonafhankelijke coëfficiënt f_1 te geven.

Zowel de normfunctie als de bepaling van de startwaarden moeten bij het fixeren van coëfficiënten aangepast worden. De normfunctie is eenvoudig aan te passen door substitutie van de vaste waarde voor de betreffende parameter in de normfunctie en door het aanpassen van het aantal door de optimalizeringsmethode te bepalen coëfficiënten. De gevolgen van het fixeren van coëfficiënten voor de bepaling van de startwaarden worden hieronder besproken.

7.5 Gevolgen fixeren voor de bepaling van de startwaarden

Indien geen van de coëfficiënten a , b of c gefixeerd wordt, is het toepassen van de methode der kleinste kwadraten in feite niets anders dan het minimalizeren van de volgende functie:

$$(13) \quad G(a, b, c) = \sum_{i=0}^{N-1} (a t_i^2 + b t_i + c - \omega_i^{m_i})^2$$

Merk op dat het fixeren van ω_0 niet van invloed is op de bepaling van de startwaarden m.b.v. de methode der kleinste kwadraten.

Indien a , b en c gefixeerd zijn, hoeven er vanzelfsprekend ook geen startwaarden voor a , b en c bepaald te worden.

De functie G is uit te schrijven als een polynoom van graad twee in a , b en c :

$$(14) \quad G(a, b, c) = C_{a2} a^2 + C_a a + C_{b2} b^2 + C_b b + C_{c2} c^2 + C_c c + C_{ab} a b + C_{ac} a c + C_{bc} b c + C$$

waarbij

$$C_{a2} = \sum_{i=0}^{N-1} t_i^4$$

$$C_a = -2 \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2 \omega_i^{m_i}$$

$$C_{b2} = \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2$$

$$C_b = -2 \sum_{i=0}^{N-1} t_i \omega_i^{m_i}$$

$$C_{c2} = N$$

$$C_c = - \sum_{i=0}^{N-1} 2 \omega_i^{m_i'}$$

$$C_{ab} = 2 \sum_{i=0}^{N-1} t_i^3$$

$$C_{ac} = 2 \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2$$

$$C_{bc} = 2 \sum_{i=0}^{N-1} t_i$$

$$C = \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i^{m_i^2}$$

Indien één of meer coëfficiënten gefixeerd zijn, dan worden hun waarden gesubstitueerd in (13). Het polynoom dat overblijft wordt G_{rest} genoemd.

Indien één van de coëfficiënten a, b of c gefixeerd is, dan worden de startwaarden van de niet-gefixeerden bepaald door het stationaire punt van G_{rest} (een punt heet een stationair punt als alle partiële afgeleiden in dat punt 0 zijn). Dit stationaire punt wordt bepaald uit een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. De coëfficiëntenmatrix van het stelsel is onder normale omstandigheden niet-singulier. Immers: $C_{a2} \gg C_{b2} \gg C_{c2}$. Indien de coëfficiëntenmatrix singulier is, rest niets anders dan andere gefixeerde waarden te bepalen en het zoekproces te herhalen.

Door de meetdata en gefixeerde parameterafhankelijkheid kan niet gegarandeerd worden dat dit stationaire punt een minimum is. De optimalizeringsmethode zal in dit geval slechte startwaarden aangeboden krijgen. Er zijn relatief ingewikkelde theorieën beschikbaar om een polynoom van graad twee met twee variabelen te minimalizeren binnen een zeker gebied. Deze worden hier niet toegepast, aangezien de coëfficiëntenmatrix zelden singulier zal zijn.

Indien twee van de drie coëfficiënten a , b en c gefixeerd zijn, blijft een polynoom G_{rest} van graad twee over als functie van de niet-gefixeerde parameter. Door dit polynoom te optimaliseren vinden we de startwaarde voor de niet-gefixeerde parameter. De startwaarde voor de niet-gefixeerde parameter is gelijk aan die waarde waarvoor het polynoom een optimum aanneemt. Deze waarde is onder alle omstandigheden welgedefinieerd omdat C_{a2} , C_{b2} en C_{c2} altijd ongelijk aan nul zijn. Er kan vanwege de afhankelijkheid van de meetdata en de gefixeerde coëfficiënten niet gegarandeerd worden dat dit optimum altijd een minimum is. Als het optimum geen minimum is, zal de optimaliseringsmethode slechte startwaarden aangeboden krijgen.

8 CONVERGENTIE EN UNICITEIT

Zij f de normfunctie:

$$\begin{array}{lll} f : & \mathbf{R}^4 & \rightarrow \mathbf{R} \\ & (a, b, c, \omega_0) & \rightarrow f(a, b, c, \omega_0) \end{array}$$

en zij $(a^*, b^*, c^*, \omega_0^*)$ een lokaal minimum van f .

T.a.v. de nauwkeurigheid en de uniciteit kunnen de volgende vragen gesteld worden:

1. Heeft f een oplossing met de coëfficiënten binnen de opgegeven intervallen ? Zo ja, is er dan precies één oplossing ?
2. Leidt de optimalizeringsmethode tot een oplossing, zo mogelijk tot dé oplossing ?
3. Als $(a^*, b^*, c^*, \omega_0^*)$ bepaald is, tot op hoeveel decimalen nauwkeurig zijn de componenten bepaald ?

ad 1. Omdat f een in het zoekgebied welgedefinieerde, kwadratische functie is, is er een oplossing ($f \geq 0 \mid \forall a, b, c, \omega_0 \in [\text{zoekgebied}]$) binnen het zoekgebied. Niet gegarandeerd is dat er slechts één oplossing is.

In het geval f een polynoom is dan zijn er methoden om aan te tonen dat f binnen een interval één of meer extremen heeft. Eén van de methoden (Sturm⁽⁷⁾) werkt met behulp van differentiatie 'zolang als nodig'. Het polynoom wordt 'opgedifferentieerd' en ieder van de afgeleiden wordt afzonderlijk onderzocht op extremen en nulpunten. In één dimensie kan dit al veel werk inhouden.

Bij toepassing van DBCONF met de oplossing ω verwerkt in f is de bovengenoemde methode niet toepasbaar: f is immers geen polynoom. Mij zijn, behalve de gewone analytische methoden (functie-onderzoek), geen methoden bekend om een dergelijk 4-dimensionaal probleem aan te pakken. Ook zonder gebruik van oplossing ω is het

bepalen van de aanwezigheid van één of meer extremen een lastige zaak. De functie f is immers afhankelijk van meetwaarden, terwijl een van de meetwaarden-onafhankelijke uitspraak wenselijk is. Schnabel⁽⁷⁾ stelt over dit type probleem dat 'men veelal genoeg moet nemen met een door de computer aangeboden oplossing'. De oplossing dient dan wel vergezeld te gaan met een norm of maat, zodat op grond daarvan gezegd kan worden of men wel of niet tevreden is met het resultaat.

- ad 2. Omdat de startwaarden binnen de opgegeven intervallen moeten liggen vindt de optimalizeringsmethode altijd een oplossing. Het gebruik van BCONF garandeert niet dat het beste minimum gevonden wordt.
- ad 3. Om een uitspraak over het aantal goede decimalen te doen is onderzoek van de partiële afgeleiden noodzakelijk. De eerste orde partiële afgeleiden vertellen (in de eerste orde) wat de verandering in de functiewaarde is indien een parameter een klein beetje varieert. Om tot een algemene uitspraak te komen die zich niet beperkt tot een specifiek punt (a, b, c, ω_0) , is het noodzakelijk om de eerste orde coëfficiënten af te schatten. De partiële afgeleiden van de oplossingen zijn in dit specifieke geval helaas onwerkbaar groot.

Er kan geconcludeerd worden dat er altijd een oplossing gevonden wordt; er valt echter weinig te zeggen over de nauwkeurigheid en de uniciteit van de oplossing (zie hoofdstuk 10 voor de testen).

9 HET SCHATTERALGORITME

De werking van het schatteralgoritme in het UDB project kan als volgt samengevat worden:

1. Bepaling van de afgeleiden met de methode der kleinste kwadraten.
2. Bepaling van de startwaarden m.b.v. de methode der kleinste kwadraten. Startwaarden mogen gefixeerd worden.
3. Bepaling van de optimale coëfficiënten m.b.v. de IMSL-routine DBCONF, gebruik makende van de exacte oplossingen, waarbij ω_0 een parameter is.

Voor de implementatie van de schatteralgoritme kunnen de volgende punten opgemerkt worden:

- De startwaarden hoeven niet in door de gebruiker aangegeven intervallen te liggen. Indien een startwaarde niet in het interval voor die specifieke coëfficiënt ligt, dan wordt deze gelijk gesteld aan de dichtstbijzijnde intervalgrens.
- Het oplossen van de stelsels lineaire vergelijkingen t.b.v. de bepaling van de afgeleiden van de hoeksnelheid behoeft geen problemen op te leveren aangezien de tijd tussen twee opeenvolgende metingen voldoende lang is om singulariteit van $A^T A$ uit te sluiten.
- Omdat BCONF *finite differences* gebruikt om de partiële afgeleiden van de normfunctie te benaderen is het wenselijk de dubbele precisie versie van BCONF te gebruiken: DBCONF.
- T.b.v. de precisie van de resultaten is het wenselijk DBCONF factoren te laten berekenen, waarmee de startwaarden vermenigvuldigd moeten worden om de optimale mathematische coëfficiënten te berekenen. Dit voorkomt dat DBCONF met heel grote of juist heel kleine coëfficiënten rekt, waardoor afrondfouten een grotere rol kunnen spelen.
- Er dienen voorzorgen genomen te worden om *overflow* van ω te voorkomen.

10 TESTEN SCHATTERALGORITME

10.1 Het doel van de testen

Een van de problemen bij de bepaling van de optimale waarden van de parameters f_1 , f_2 en c_w is, dat de te minimaliseren functie niet noodzakelijkerwijs slechts één minimum in het zoekgebied behoeft te hebben. Het is derhalve niet uitgesloten dat het zoekalgoritme een verkeerd (niet optimaal) minimum vindt, hetgeen onjuiste coëfficiënten tot gevolg heeft. Het doel van de testen is aan te tonen dat het schatteralgoritme m.b.v. de door het schatteralgoritme berekende startwaarden in praktisch alle gevallen het beste optimum vindt.

10.2 Testprocedure

Aangezien het praktisch onmogelijk is op analytische wijze te bewijzen dat er geen andere betere (kleinere) minima bestaan, is gepoogd op numerieke wijze een indruk te krijgen van het karakter van de normfunctie.

Daartoe worden met het schatteralgoritme de optimale coëfficiënten bepaald behorende bij een uitrolcurve uit de praktijk. Deze optimale coëfficiënten leggen een collectie startwaarden vast:

$$\{ (\alpha * f_1, \beta * f_2, \gamma * c_w) \mid \alpha, \beta, \gamma = 0.1, 1.0, 10.0 \}$$

Op ieder tupel startwaarden (f_1, f_2, c_w) is nu het schatteralgoritme toegepast, waarbij de startwaarde voor ω_0 steeds gelijk gesteld wordt aan de eerste gemeten hoeksnelheid. De berekening van de startwaarden door het schatteralgoritme wordt in dit geval niet uitgevoerd. Door de omvang van de collectie (27 tupels startwaarden) kan aangenomen worden dat de coëfficiëntenverzameling met de kleinste norm het absolute minimum vormt binnen het zoekgebied. Als deze coëfficiëntenverzameling overeenkomt met de door het schatteralgoritme

(mèt de startwaardenbepaling) berekende optimale coëfficiënten, dan heeft het schatteralgoritme het gewenste absolute minimum blijkbaar bepaald voor de specifieke uitrolcurve.

Deze testprocedure wordt uitgevoerd met verschillende uitrolcurves. Het volstaat niet om aan te tonen dat in een specifiek geval het schatteralgoritme het absolute minimum vindt.

10.3 Testdata

Het schatteralgoritme is getest met een vijftal uitrolcurves uit de praktijk:

Uitrol1A
Uitrol1B
Uitrol2A
Uitrol2B
Land

De laatste uitrolcurve is afkomstig van een Landrover. Alle andere zijn gemaakt met de DAF YA-4440. De uitrolcurves 1A en 2A zijn in dezelfde (wind-) richting uitgevoerd. De richting waarin 1B en 2B uitgevoerd zijn was tegengesteld aan die van 1A en 2A. De windsnelheid is niet bekend.

Hieronder volgen de door het schatteralgoritme gebruikte technische gegevens van de voertuigen:

Voertuig	YA-4440	Landrover
Massa [kg]	6480	1750
Dynamische wielradius [m]	0.525	0.330
Effectieve oppervlak [m ²]	4.1625	2.3200

Het zoekgebied voor optimale coëfficiënten was voor alle uitrolcurves:

$$0.0001 \leq f_1 \leq 10.0000$$

$$0.000001 \leq f_2 \leq 10.0000$$

$$0.00001 \leq c_w \leq 10.0000$$

$$10.0 \leq v_0 \leq 100.0 \text{ km/h}$$

10.4 Toelichting beschrijving testresultaten

Van elke uitrolcurve is een grafiek met de snelheid als functie van de tijd en een grafiek met het snelheidsverschil tussen de berekende uitrolcurve en de gemeten uitrolcurve gemaakt. Een tabel met tupels en bijbehorende optimale coëfficiënten is gegeven en de test is van commentaar voorzien.

De grafieken geven een visuele indruk van de kwaliteit van de fit. Indien de berekende en de gemeten uitrolcurve overeenkomen dan is er sprake van een goede fit. De coördinaten van de berekende uitrolcurve zijn verkregen door de optimale coëfficiënten te substitueren in de exacte oplossing, waardoor een functie van alleen de tijd ontstaat.

Verklaring legenda uitrolcurve-grafieken (zie b.v. figuur 1 op pagina 40)

<i>file.txt</i>	de naam van de file van de uitrolcurve
<i>massa</i>	de massa van het voertuig [kg]
<i>DWR</i>	de dynamische wielradius [m]
<i>EffA</i>	de effectieve oppervlakte [m ²]
<i>f₁</i>	de optimale coëfficiënt <i>f₁</i>
<i>f₂</i>	de optimale coëfficiënt <i>f₂</i>
<i>c_w</i>	de optimale coëfficiënt <i>c_w</i>
<i>ω₀</i>	de optimale coëfficiënt <i>ω₀</i>
<i>Delta</i>	de bijbehorende Δ (= norm)
<i>Origineel</i>	De lijn 'Origineel' is de polylijn van de gemeten snelheid als functie van de tijd.
<i>Resultaat</i>	De lijn 'Resultaat' is de polylijn van de berekende snelheid als functie van de tijd.

Δ is gedefinieerd door (zie (11)):

$$\Delta = \sqrt{(F(a, b, c, \omega_0) / N)}$$

Verklaring van de kolommen van de tabel (zie b.v. tabel Uitrol1A op pagina 41):

n	Identificatie nummer van de tupel
f_1	Startwaarde van f_1
f_2	Startwaarde van f_2
c_w	Startwaarde van c_w
ω_0	Hoeksnelheid op het tijdstip van de eerste meting [rad / s]
Δ	De norm behorende bij de startwaarden [rad / s]. Een zeer hoge Δ geeft aan dat de startwaarden zeer slecht zijn. Het is derhalve onwaarschijnlijk dat dergelijke startwaarden berekend zullen worden door de methode der kleinste kwadraten.
Opt_ f_1	Optimale waarde f_1
Opt_ f_2	Optimale waarde f_2
Opt_ c_w	Optimale waarde c_w
Opt_ ω_0	Optimale hoeksnelheid op het tijdstip van de eerste meting [rad / s]
Opt_ Δ	Optimale Δ behorende bij de optimale waarden [rad / s]
WC	Warning Code. Een van DBCONF afkomstige waarschuwingscode.
	0 geen problemen tijdens zoekproces
	3 maximum aantal iteraties overschreden.
	8 mogelijk niet optimale minimum gevonden
	Andere waarden zijn ook mogelijk, maar hebben zich niet voorgedaan tijdens de testen.
Iter	Het aantal iteraties. DBCONF is een iteratief proces. Het ingestelde maximum aantal iteraties bedraagt 100.

De kolommen voor ω_0 zijn toegevoegd aan de tabel aangezien dit tijdens het optimaliseringsproces een gewone parameter is. Een extreme waarde voor ω_0 kan een verklaring vormen voor een grote Δ .

In de tabel is Opt_ Δ de meest interessante kolom. Deze kolom kan het aannemelijk maken dat de te minimaliseren functie precies één minimum heeft en dus dat de parameters f_1 , f_2 en c_w uniek bepaald zijn. Daar waar Opt_ Δ afwijkt van hetgeen op basis van de beste waarden voor de parameters f_1 , f_2 en c_w verwacht had mogen worden, wordt een verklaring gegeven. Om

onderscheid te maken tussen makkelijke en moeilijke gevallen zijn de tupels geclassificeerd. Er zijn 3 klassen: goede, matige en slechte tupels.

Een tupel is *goed* indien de bij de optimale parameters behorende Δ de kleinste is van de hele kolom.

Een tupel is *matig* indien de bij de optimale parameters behorende Δ 'niet veel' afwijkt (maximaal een factor 2) van de kleinste Δ uit de kolom.

Een tupel is *slecht* indien het maximum aantal iteraties uitgevoerd was of als Δ 'groot' is (d.i.: meer dan een factor 2 afwijkt van de kleinste Δ).

Deze classificatie is ook terug te vinden in de tabel:

- De slechte tupels zijn voorzien van een ster '*'.
- De Opt_Δ van de matige tupels is onderstreept.
- De goede tupels hebben geen ster '*' en ook is de Opt_Δ niet onderstreept.

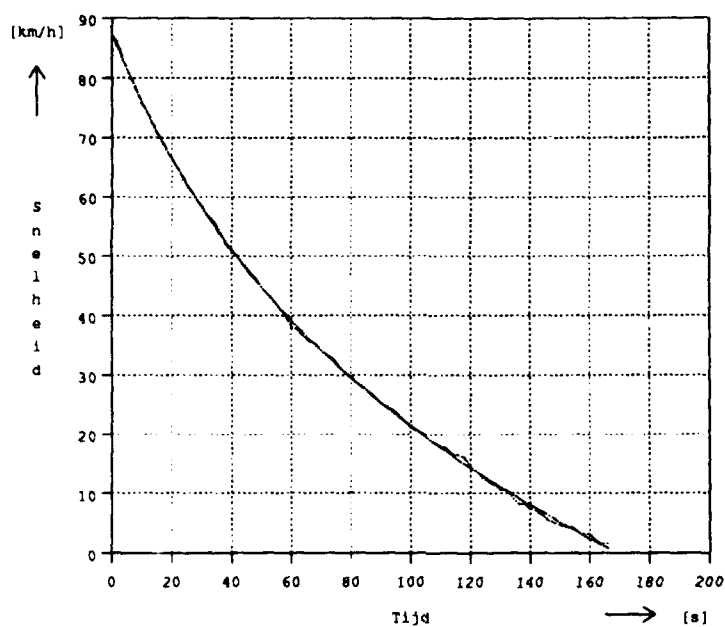
De matige tupels zouden bij ontbreken van andere resultaten kunnen leiden tot incorrecte resultaten.

Indien blijkt dat er voor de kleinste Δ 's slechts één unieke optimale parameterverzameling bestaat, dan is het aannemelijk dat de te minimaliseren functie slechts één minimum heeft. Blijkt echter dat er meer niet-identieke parameterverzamelingen bestaan voor de kleinste Δ 's, dan is het aannemelijk dat de te minimaliseren functie verschillende minima heeft. De waarden voor f_1 , f_2 en c_w zijn dan afhankelijk van de beginschatting en niet uniek bepaald.

Bij het commentaar wordt specifiek aandacht gegeven aan:

- De ligging van de origineel- en resultaatpolylijn t.o.v. elkaar.
- De verhouding Opt_Δ / Opt_ω₀. Des te kleiner, des te meer lijkt de resultaatcurve op de origineelcurve.
- Beschouwing van de slechte en matige tupels.
- Uniciteit minimum.
- Het vergelijk van het minimum bepaald door het schatteralgoritme (met startwaardenbepaling) en het beste minimum uit de tabel.

10.4.1 Uitrol1A test

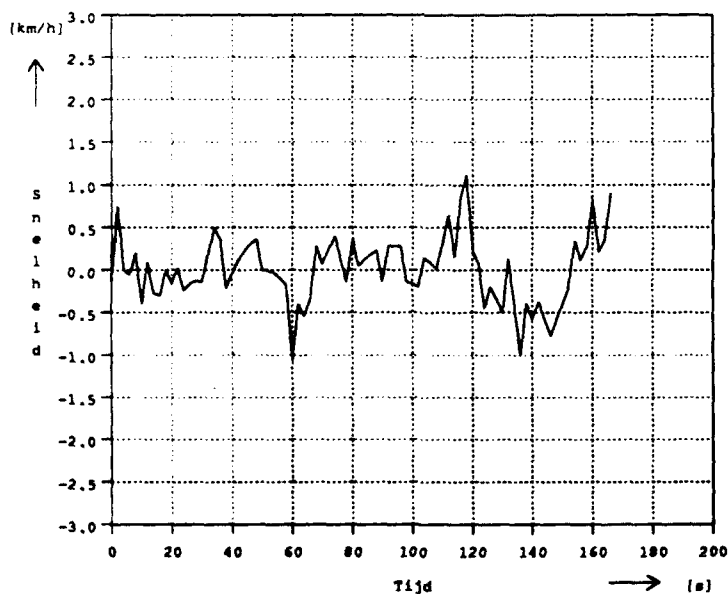


UITROL1A.TXT

Massa 6480
DWR 0.525
EffA 4.1625

f1 0.00760
f2 0.00031
cw 0.43555
v0 87.62
Delta 0.206628

..... Origineel
———— Resultaat



UITROL1A.TXT

Fig. 1. Gemeten en berekende uitrolcurve en verschil tussen beide curves voor 1A-metingen.

Tabel 1. UitrollA coëfficiënten bepaald uitgaande van verschillende startwaarden

n	f_1	f_2	c_w	ω_0	Δ	Opt_ f_1	Opt_ f_2	Opt_ c_w	Opt_ ω_0	Opt_ Δ	WC	Iter
1	0.00076	0.00003	0.04300	46.270	26.9211	0.00076	0.00001	0.00001	38.767	2.5736	3	100*
2	0.00076	0.00003	0.43000	46.270	11.4870	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	23
3	0.00076	0.00003	4.30000	46.270	10.8078	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	31
4	0.00076	0.00030	0.04300	46.270	17.4848	0.00010	0.00002	0.00008	38.884	2.5448	3	100*
5	0.00076	0.00030	0.43000	46.270	7.4696	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	19
6	0.00076	0.00030	4.30000	46.270	11.3418	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	35
7	0.00076	0.00300	0.04300	46.270	9.4152	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	28
8	0.00076	0.00300	0.43000	46.270	10.5161	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	32
9	0.00076	0.00300	4.30000	46.270	15.0816	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	47
10	0.00760	0.00003	0.04300	46.270	14.8871	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	28
11	0.00760	0.00003	0.43000	46.270	3.7762	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	15
12	0.00760	0.00003	4.30000	46.270	16.3080	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	27
13	0.00760	0.00030	0.04300	46.270	8.0358	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	26
14	0.00760	0.00030	0.43000	46.270	0.2398	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	9
15	0.00760	0.00030	4.30000	46.270	16.7905	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	33
16	0.00760	0.00300	0.04300	46.270	12.6080	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	27
17	0.00760	0.00300	0.43000	46.270	13.5181	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	24
18	0.00760	0.00300	4.30000	46.270	17.7035	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	34
19	0.07600	0.00003	0.04300	46.270	114.3363	0.00010	0.00009	0.00176	39.321	2.3741	3	100*
20	0.07600	0.00003	0.43000	46.270	1070.3910	0.00010	0.00001	0.00001	38.763	2.5767	3	100*
21	0.07600	0.00003	4.30000	46.270	1102.7855	0.20915	0.00041	10.00000	10.000	176.1522	8	25*
22	0.07600	0.00030	0.04300	46.270	101.6421	0.00010	0.00001	0.00003	38.770	2.5665	3	100*
23	0.07600	0.00030	0.43000	46.270	1220.2246	0.00010	0.00001	0.00002	38.772	2.5706	3	100*
24	0.07600	0.00030	4.30000	46.270	368.8917	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	48
25	0.07600	0.00300	0.04300	46.270	48.5530	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	33
26	0.07600	0.00300	0.43000	46.270	57.8503	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	33
27	0.07600	0.00300	4.30000	46.270	269.1175	0.09546	0.00128	10.00000	28.846	145.2587	3	100*

Opmerkingen:

- De grafieken tonen dat de origineel- en resultaatpolylijn keurig op elkaar liggen.
- Voor de kleinste Opt_ Δ bedraagt de verhouding Opt_ Δ / Opt_ ω_0 ongeveer: 0.5 %. (0.2066 / 46.385)
- Alle slechte tupels onderscheiden zich duidelijk door de sterk afwijkende Opt_ Δ . Gevolg: er reteren enkel goede tupels en er is één uniek minimum gevonden.
- Het schatteralgoritme (met startwaardenbepaling) heeft het absolute minimum in het zoekgebied gevonden.

10.4.2 Uitrol1B test

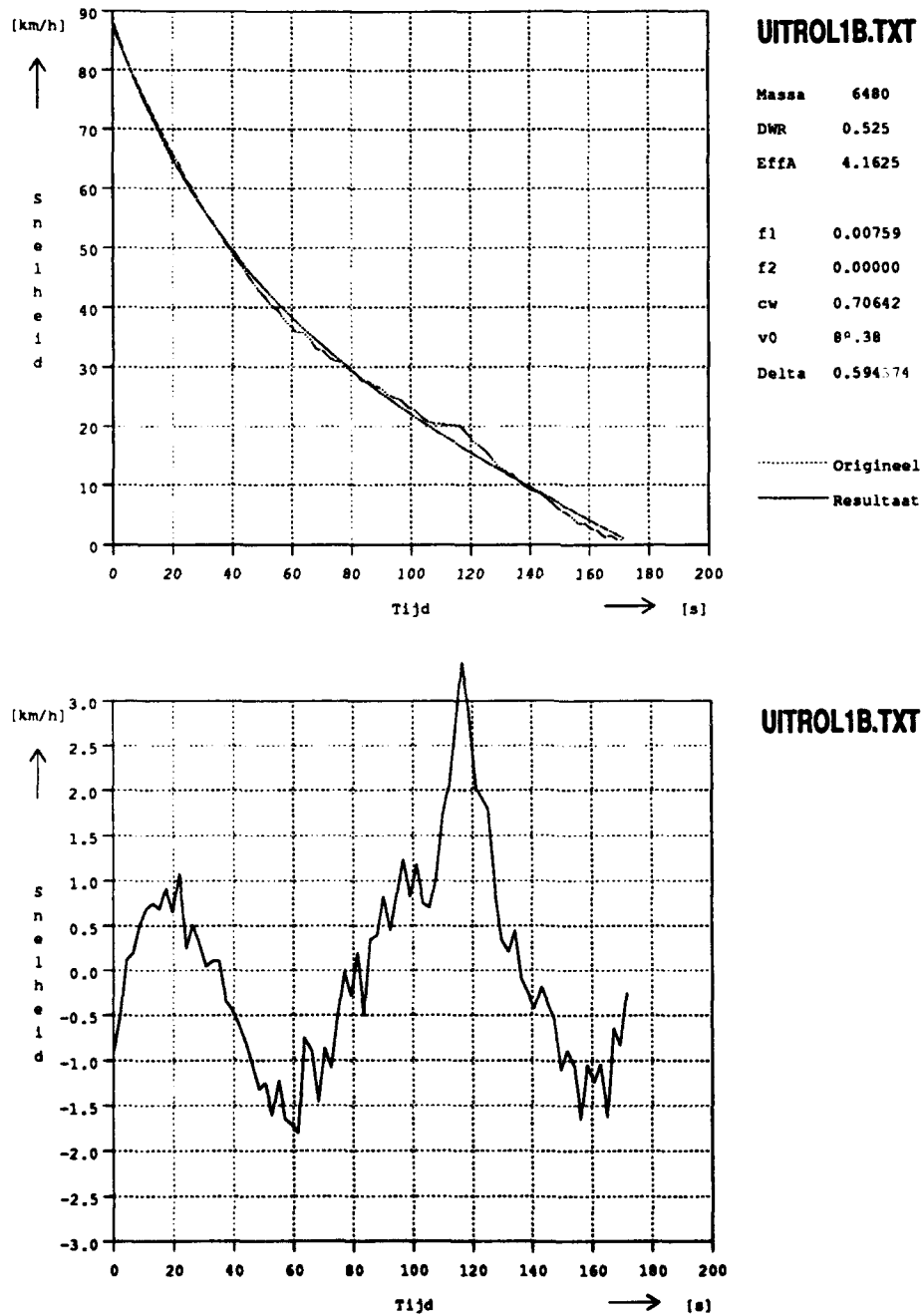


Fig. 2. Gemeten en berekende uitrolcurve en verschil tussen beide curves voor 1B-metingen.

Tabel 2. Uitrol1B coëfficiënten bepaald uitgaande van verschillende startwaarden

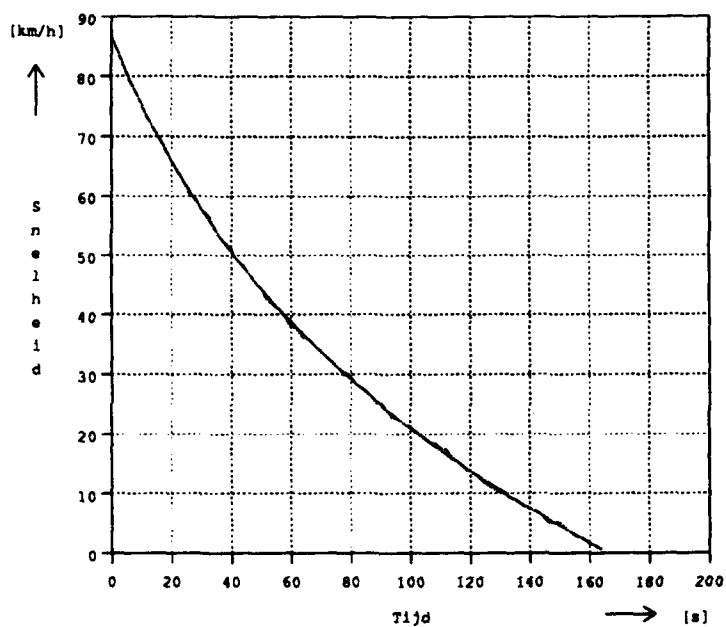
n	f_1	f_2	c_w	ω_0	A	Opt_ f_1	Opt_ f_2	Opt_ c_w	Opt_ ω_0	Opt_A	MC Iter
1	0.00076	0.00001	0.07070	46.270	24.8956	0.00010	0.00001	0.00001	37.643	2.8823	3 100*
2	0.00076	0.00001	0.70700	46.270	7.0529	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 15
3	0.00076	0.00001	7.07000	46.270	13.0684	0.00742	0.00000	0.72797	47.317	<u>0.6139</u>	<u>0 37</u>
4	0.00076	0.00010	0.07070	46.270	22.4318	0.00010	0.00002	0.00012	37.810	2.8460	3 100*
5	0.00076	0.00010	0.70700	46.270	6.0393	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 13
6	0.00076	0.00010	7.07000	46.270	13.1867	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 40
7	0.00076	0.00100	0.07070	46.270	3.8008	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 19
8	0.00076	0.00100	0.70700	46.270	3.4252	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 16
9	0.00076	0.00100	7.07000	46.270	14.2477	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 38
10	0.00760	0.00001	0.07070	46.270	14.0862	0.00793	0.00000	0.63211	45.667	<u>0.6951</u>	<u>0 18</u>
11	0.00760	0.00001	0.70700	46.270	0.6637	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 9
12	0.00760	0.00001	7.07000	46.270	67.2049	0.01135	0.00000	10.00000	65.748	42.0363	0 24*
13	0.00760	0.00010	0.07070	46.270	11.6450	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 24
14	0.00760	0.00010	0.70700	46.270	1.3894	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 8
15	0.00760	0.00010	7.07000	46.270	71.8585	0.01135	0.00000	10.00000	65.748	42.0363	0 24*
16	0.00760	0.00100	0.07070	46.270	3.5765	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 26
17	0.00760	0.00100	0.70700	46.270	8.1330	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 12
18	0.00760	0.00100	7.07000	46.270	195.0702	0.01089	0.00000	10.00000	65.785	42.0118	0 36*
19	0.07600	0.00001	0.07070	46.270	131.8747	0.00010	0.00001	0.00002	37.661	2.8766	3 100*
20	0.07600	0.00001	0.70700	46.270	1167.3297	0.47186	0.00000	0.00007	10.000	14.2296	0 15*
21	0.07600	0.00001	7.07000	46.270	1131.3095	0.00755	0.00000	0.70620	46.785	<u>0.5968</u>	<u>0 41</u>
22	0.07600	0.00010	0.07070	46.270	125.4806	0.00753	0.00000	0.68956	46.245	<u>0.6254</u>	<u>0 29</u>
23	0.07600	0.00010	0.70700	46.270	547.3117	0.00777	0.00000	0.68134	46.487	<u>0.6030</u>	<u>0 32</u>
24	0.07600	0.00010	7.07000	46.270	794.3810	0.00049	0.00018	1.32750	49.223	3.1717	3 100*
25	0.07600	0.00100	0.07070	46.270	83.1699	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 31
26	0.07600	0.00100	0.70700	46.270	688.1066	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 43
27	0.07600	0.00100	7.07000	46.270	137.4018	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0 42

Commentaar:

- De grafieken tonen dat de origineel- en de resultaatpolylijn relatief veel verschillen rond tijdstip 118 seconden. Navraag leerde dat de afwijking wellicht een gevolg is van (flauwe) bochten aan het eind van de testweg. Deze oefenen een extra kracht uit op het voertuig. De conclusie die hieruit getrokken mag worden is, dat de berekende optimale coëfficiënten niet betrouwbaar zijn door de slechte origineelpolylijn.
- Voor de kleinste Opt_Δ bedraagt de verhouding Opt_Δ / Opt_ω₀ ongeveer: 1.3 %. (0.5944 / 46.762)
- Alle slechte tupels onderscheiden zich duidelijk door de sterk afwijkende Opt_Δ.

- De matige tupels kunnen niet afgewezen worden. Het verschil tussen de Opt_Δ 's van de matige tupels is erg klein: ongeveer 5% (0.03 / 0.60). De uitspraak dat hiermee aangetoond is dat de optimale coëfficiënten startwaarde-afhankelijk zouden zijn is echter niet te maken aangezien de origineelpolylijn slecht is. Bovendien liggen de bij de matige en goede Δ 's behorende optimale coëfficiënten niet ver van elkaar af. Grotere rekenprecisie of een kleiner stopcriterium voor DBCONF zouden mogelijk tot gevolg hebben dat convergentie plaats vindt naar één minimum, als er in werkelijkheid rond het absolute minimum een gebiedje is waar de punten bijna stationair zijn.
- Een fysische reden om twijfelen aan de origineelpolylijn is de onrealistische waarde voor Opt_{f_2} : 0.00000.
- Ondanks de slechte origineelpolylijn komt het minimum geleverd door het schatteralgoritme (met startwaardenbepaling) overeen met het absolute minimum in het zoekgebied volgens de tabel.

10.4.3 Uitrol2A test

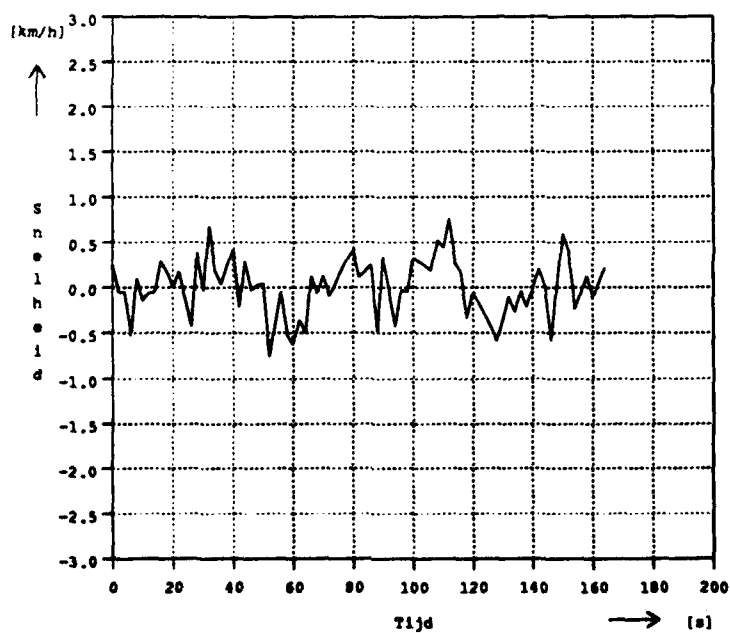


UITROL2A.TXT

Massa 6480
DWR 0.525
EffA 4.1625

f1 0.00773
f2 0.00031
cw 0.42722
v0 86.81
Delta 0.162979

----- Origineel
———— Resultaat



UITROL2A.TXT

Fig. 3. Gemeten en berekende uitrolcurve en verschil tussen beide curves voor 2A-metingen.

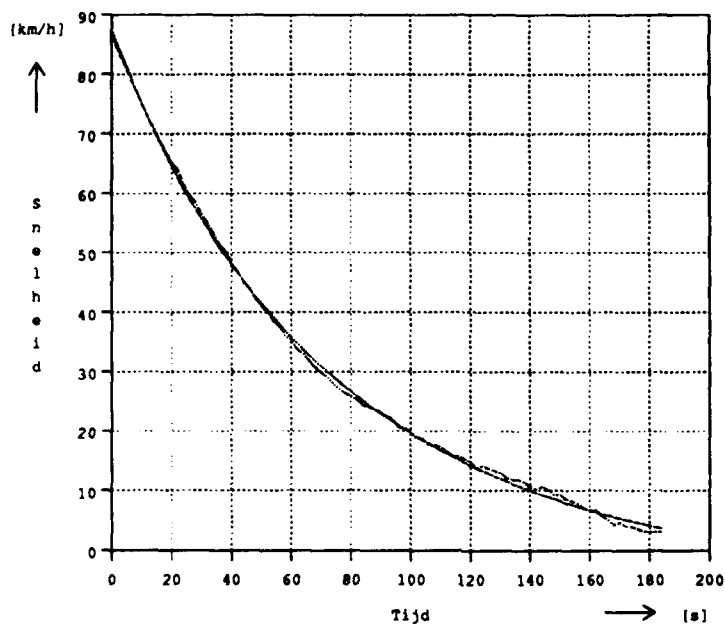
Tabel 3. Uitrol2A coëfficiënten bepaald uitgaande van verschillende startwaarden

n	f ₁	f ₂	c _w	ω ₀	Δ	Opt_f ₁	Opt_f ₂	Opt_c _w	Opt_ω ₀	Opt_Δ	MC Iter
1	0.00077	0.00003	0.04200	46.063	26.9102	0.00077	0.00001	0.00001	38.590	2.5038	3 100*
2	0.00077	0.00003	0.42000	46.063	11.7948	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 23
3	0.00077	0.00003	4.20000	46.063	10.5323	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 26
4	0.00077	0.00030	0.04200	46.063	17.5525	0.00010	0.00002	0.00010	38.702	2.4724	3 100*
5	0.00077	0.00030	0.42000	46.063	7.7401	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 20
6	0.00077	0.00030	4.20000	46.063	11.0753	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 36
7	0.00077	0.00300	0.04200	46.063	9.2769	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 29
8	0.00077	0.00300	0.42000	46.063	10.3564	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 35
9	0.00077	0.00300	4.20000	46.063	14.8961	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 42
10	0.00770	0.00003	0.04200	46.063	14.8261	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 27
11	0.00770	0.00003	0.42000	46.063	4.0079	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 17
12	0.00770	0.00003	4.20000	46.063	15.7666	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 28
13	0.00770	0.00030	0.04200	46.063	8.0533	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 24
14	0.00770	0.00030	0.42000	46.063	0.3764	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 10
15	0.00770	0.00030	4.20000	46.063	16.2898	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 33
16	0.00770	0.00300	0.04200	46.063	12.5055	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 26
17	0.00770	0.00300	0.42000	46.063	13.3952	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 24
18	0.00770	0.00300	4.20000	46.063	17.5407	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 29
19	0.07700	0.00003	0.04200	46.063	114.2764	0.00010	0.00009	0.00200	39.280	2.3074	3 100*
20	0.07700	0.00003	0.42000	46.063	1212.7680	0.00010	0.00001	0.00001	38.585	2.5071	3 100*
21	0.07700	0.00003	4.20000	46.063	246.2373	0.01284	0.00000	10.00000	10.000	46.4252	8 41*
22	0.07700	0.00030	0.04200	46.063	101.7481	0.00010	0.00001	0.00002	38.606	2.4993	3 100*
23	0.07700	0.00030	0.42000	46.063	1233.8154	0.00010	0.00026	1.92798	13.518	14.5420	0 5*
24	0.07700	0.00030	4.20000	46.063	384.2105	0.22148	0.00000	10.00000	13.385	107.5985	0 18*
25	0.07700	0.00300	0.04200	46.063	48.8409	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0 35
26	0.07700	0.00300	0.42000	46.063	57.9394	0.00891	0.00000	0.61695	46.319	<u>0.2279</u>	<u>8 33</u>
27	0.07700	0.00300	4.20000	46.063	825.9824	0.20909	0.00000	10.00000	34.083	172.8129	0 43

Opmerkingen:

- De grafieken tonen dat de origineel- en resultaatpolylijn keurig op elkaar liggen.
- Voor de kleinste Opt_Δ bedraagt de verhouding Opt_Δ / Opt_ω₀ ongeveer: 0.4 %. (0.1630 / 46.358)
- Alle slechte tupels onderscheiden zich duidelijk door de sterk afwijkende Opt_Δ.
- De enige matige tupel (26) kan op fysieke gronden uitgesloten worden aangezien Opt_f₂ een randwaarde van het zoekgebied aanneemt.
- Gevolg: er resteren enkel goede tupels en er is één uniek minimum gevonden.
- Het schatting algoritme (met startwaardenbepaling) heeft het absolute minimum in het zoekgebied gevonden.

10.4.4 Uitrol2B test

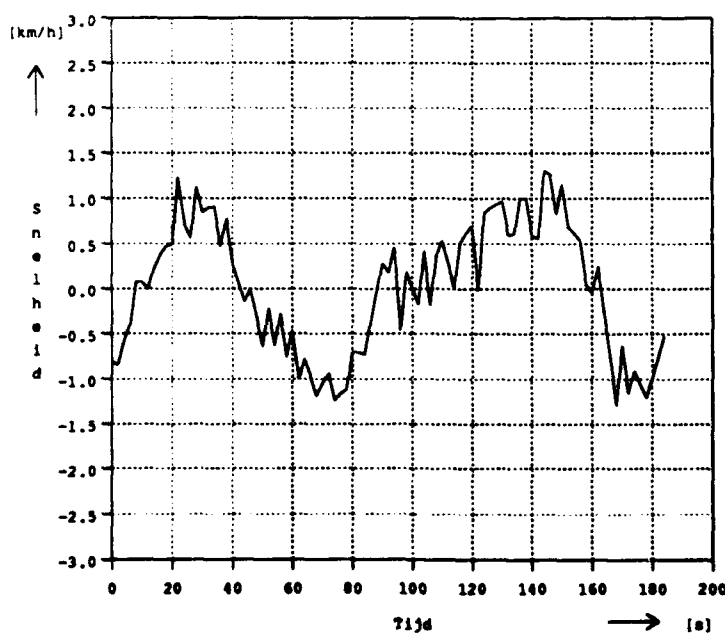


UITROL2B.TXT

Massa 6480
DWR 0.525
EffA 4.1625

f1 0.00192
f2 0.00115
cw 0.19036
v0 87.87
Delta 0.379527

..... Origineel
———— Resultaat



UITROL2B.TXT

Fig. 4. Gemeten en berekende uitrolcurve en verschil tussen beide curves voor 2B-metingen.

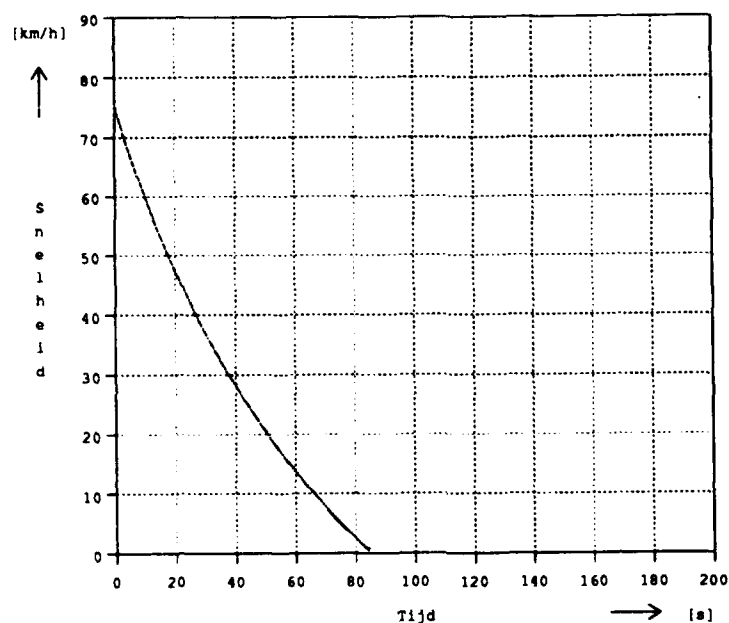
Tabel 4. Uitrol2B coëfficiënten bepaald uitgaande van verschillende startwaarden

n	f_1	f_2	c_w	ω_0	Δ	Opt_ f_1	Opt_ f_2	Opt_ c_w	Opt_ ω_0	Opt_ Δ	WC	Iter
1	0.00019	0.00010	0.01900	46.063	24.1630	0.00010	0.00010	0.00001	10.000	13.4146	8	35*
2	0.00019	0.00010	0.19000	46.063	18.0932	0.00010	0.00000	0.00002	10.000	13.4022	3	100*
3	0.00019	0.00010	1.90000	46.063	4.3311	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	18
4	0.00019	0.00100	0.01900	46.063	5.4740	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	24
5	0.00019	0.00100	0.19000	46.063	3.0749	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	18
6	0.00019	0.00100	1.90000	46.063	7.0366	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	25
7	0.00019	0.01000	0.01900	46.063	15.4402	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	8	32
8	0.00019	0.01000	0.19000	46.063	15.4986	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	34
9	0.00019	0.01000	1.90000	46.063	15.9790	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	31
10	0.00190	0.00010	0.01900	46.063	24.1630	0.00190	0.00003	0.01853	10.000	13.4080	8	31*
11	0.00190	0.00010	0.19000	46.063	15.7500	0.00010	0.00003	0.00026	35.746	3.7313	3	100*
12	0.00190	0.00010	1.90000	46.063	4.6596	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	14
13	0.00190	0.00100	0.01900	46.063	3.7156	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	29
14	0.00190	0.00100	0.19000	46.063	1.4368	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	16
15	0.00190	0.00100	1.90000	46.063	7.8389	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	23
16	0.00190	0.01000	0.01900	46.063	15.6934	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	40
17	0.00190	0.01000	0.19000	46.063	15.7506	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	34
18	0.00190	0.01000	1.90000	46.063	16.2214	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	31
19	0.01900	0.00010	0.01900	46.063	9.9851	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	28
20	0.01900	0.00010	0.19000	46.063	12.7484	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	25
21	0.01900	0.00010	1.90000	46.063	304.0929	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	49
22	0.01900	0.00100	0.01900	46.063	15.7194	0.00010	0.00150	0.00001	45.879	0.5407	8	9
23	0.01900	0.00100	0.19000	46.063	17.1024	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	32
24	0.01900	0.00100	1.90000	46.063	249.8380	0.04744	0.00000	7.01921	10.000	99.1024	0	22*
25	0.01900	0.01000	0.01900	46.063	18.3241	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	41
26	0.01900	0.01000	0.19000	46.063	18.3758	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	38
27	0.01900	0.01000	1.90000	46.063	18.8174	0.00192	0.00115	0.19036	46.494	0.3795	0	46

Commentaar:

- De grafieken tonen dat de origineel- en resultaatpolylijn niet perfect op elkaar liggen.
- Voor de kleinste Opt_ Δ bedraagt de verhouding Opt_ Δ / Opt_ ω_0 ongeveer: 0.8 %. (0.3795 / 46.494)
- Alle slechte tupels onderscheiden zich duidelijk door de sterk afwijkende Opt_ Δ .
- De enige matige tupel (22) kan op fysische gronden uitgesloten worden aangezien Opt_ c_w een randwaarde van aanneemt van het zoekgebied.
- Gevolg: er resteren enkel goede tupels en er is één uniek minimum gevonden.
- Het schatteralgoritme (met startwaardenbepaling) heeft het absolute minimum in het zoekgebied gevonden.

10.4.5 Land test

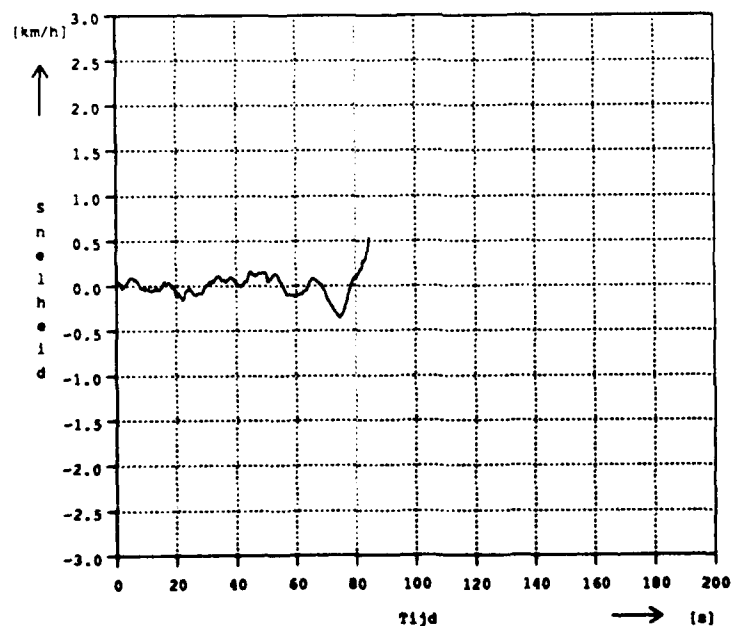


LAND.TXT

Massa 1750
DWR 0.330
Effa 2.3200

f1 0.01348
f2 0.00101
cw 0.19409
v0 75.37
Delta 0.104995

..... Origineel
———— Resultaat



LAND.TXT

Fig. 5. Gemeten en berekende uitrolcurve en verschil tussen beide curves voor de Landrover metingen.

Tabel 5. Land coëfficiënten uitgaande van verschillende startwaarden

n	f_1	f_2	c_w	ω_0	Δ	Opt_ f_1	Opt_ f_2	Opt_ c_w	Opt_ ω_0	Opt_ Δ	WC Iter
1	0.00130	0.00010	0.01900	63.471	36.4426	0.00130	0.00004	0.00008	55.624	2.8816	3 100*
2	0.00130	0.00010	0.19000	63.471	24.6142	0.00010	0.00001	0.00001	55.500	2.9208	3 100*
3	0.00130	0.00010	1.90000	63.471	8.1304	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 23
4	0.00130	0.00100	0.01900	63.471	17.2635	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 23
5	0.00130	0.00100	0.19000	63.471	11.6017	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 20
6	0.00130	0.00100	1.90000	63.471	10.2375	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 34
7	0.00130	0.01000	0.01900	63.471	20.3552	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 44
8	0.00130	0.01000	0.19000	63.471	20.6175	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 46
9	0.00130	0.01000	1.90000	63.471	22.5186	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 48
10	0.01300	0.00010	0.01900	63.471	20.0253	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 23
11	0.01300	0.00010	0.19000	63.471	11.7972	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 24
12	0.01300	0.00010	1.90000	63.471	12.7258	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 20
13	0.01300	0.00100	0.01900	63.471	4.9825	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 17
14	0.01300	0.00100	0.19000	63.471	0.6382	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 7
15	0.01300	0.00100	1.90000	63.471	15.6722	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 40
16	0.01300	0.01000	0.01900	63.471	23.1023	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 36
17	0.01300	0.01000	0.19000	63.471	23.3332	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 39
18	0.01300	0.01000	1.90000	63.471	25.0461	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 45
19	0.13000	0.00010	0.01900	63.471	149.0012	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 37
20	0.13000	0.00010	0.19000	63.471	269.6429	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 33
21	0.13000	0.00010	1.90000	63.471	525.3684	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 58
22	0.13000	0.00100	0.01900	63.471	125.0520	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 39
23	0.13000	0.00100	0.19000	63.471	179.1244	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 38
24	0.13000	0.00100	1.90000	63.471	813.0260	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 34
25	0.13000	0.01000	0.01900	63.471	53.5453	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 52
26	0.13000	0.01000	0.19000	63.471	54.5294	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0 60
27	0.13000	0.01000	1.90000	63.471	816.9664	0.00010	0.02177	0.00001	100.000	24.2750	3 100*

Opmerkingen:

- De grafieken tonen dat de origineel- en resultaatpolylijn keurig op elkaar liggen.
- Voor de kleinste Opt_ Δ bedraagt de verhouding Opt_ Δ / Opt_ ω_0 ongeveer: 0.2 %. (0.1050 / 63.440)
- Alle slechte tupels onderscheiden zich duidelijk door de sterk afwijkende Opt_ Δ . Gevolg: er resteren enkel goede tupels en er is één uniek minimum gevonden.
- Het schatting algoritme (met startwaardenbepaling) heeft het absolute minimum in het zoekgebied gevonden.

10.5 Testconclusies

De grafieken van Uitrol1A, Uitrol2A en Land tonen dat de origineel- en de resultaatpolylijnen keurig op elkaar liggen. Bij Uitrol1B en Uitrol2B is dit niet het geval. De coëfficiënten van Uitrol1B en Uitrol2B zijn derhalve niet betrouwbaar.

Voor de kleinste Opt_Δ ligt de verhouding $\text{Opt}_\Delta / \text{Opt}_{\omega_0}$ steeds tussen 0.2 % en 1.3 %, waarbij de slechtste (hoogste) verhoudingen afkomstig zijn van de B-polylijnen. Voor een optisch 'goede' uitrolcurve bedraagt de verhouding $\text{Opt}_\Delta / \text{Opt}_{\omega_0}$ hoogstens 0.5 %.

Ofschoon niet *gegarandeerd* kan worden dat het schatteralgoritme het beste minimum binnen het zoekgebied vindt, heeft het algoritme in alle geteste gevallen dit beste minimum blijkbaar wel gevonden.

Alle slechte tupels onderscheiden zich duidelijk door de sterk afwijkende Opt_Δ .

Bij matige tupels dient gekeken te worden naar de waarden van de fysische coëfficiënten. Indien één of meer coëfficiënten een randwaarde van het zoekgebied aannemen, dan zijn de coëfficiënten niet betrouwbaar.

Het is overigens onwaarschijnlijk dat het schatteralgoritme leidt tot een matige tupel zoals bij Uitrol1B, Uitrol2A en Uitrol2B is voorgekomen. De startwaarden zoals berekend m.b.v. de methode der kleinste-kwadraten blijken namelijk reeds erg goed te zijn:

Tabel 6. Schatteralgoritme

bestand	f_1	f_2	c_w	w_0	Δ	Opt_{f_1}	Opt_{f_2}	Opt_{c_w}	Opt_{w_0}	Opt_Δ	WC	Iter
Uitrol1A	0.00670	0.00046	0.37111	46.270	0.2697	0.00760	0.00031	0.43555	46.358	0.2066	0	9
Uitrol1B	0.00700	0.00020	0.49551	46.270	0.7124	0.00759	0.00000	0.70642	46.762	0.5944	0	8
Uitrol2A	0.00754	0.00033	0.42966	46.063	0.1755	0.00773	0.00031	0.42722	45.930	0.1630	0	7
Uitrol2B	0.00161	0.00134	0.04551	46.063	0.4200	0.00192	0.00119	0.19036	46.494	0.3793	0	11
Land	0.01235	0.00124	0.13709	63.471	0.1005	0.01348	0.00101	0.19409	63.440	0.1050	0	8

De Δ 's behorende bij de matige tupels zijn ongeveer een factor 100 groter dan de Δ 's afkomstig van de met het schatteralgoritme berekende startwaarden. De Δ 's behorende bij de startwaarden zoals berekend door het schatteralgoritme liggen al redelijk dicht bij Opt_Δ . Dit geeft aan dat de kleinste-kwadraten startwaardenbepaling goed voldoet.

Omdat zowel Uitrol1A als Uitrol2A goede uitrolcurves zijn en beide onder dezelfde omstandigheden en met hetzelfde voertuig zijn uitgevoerd, is het zinvol de fysische coëfficiënten met elkaar te vergelijken (zie tabel 6). De fysische coëfficiënten behoren ongeacht de uitrolcurve identiek te zijn. Relatief beschouwd:

$$\frac{\text{Opt}_{f_1}(\text{Uitrol1A}) - \text{Opt}_{f_1}(\text{Uitrol2A})}{\text{Opt}_{f_1}(\text{Uitrol1A})} = -1.7 \%$$

$$\frac{\text{Opt}_{f_2}(\text{Uitrol1A}) - \text{Opt}_{f_2}(\text{Uitrol2A})}{\text{Opt}_{f_2}(\text{Uitrol1A})} = 0.0 \%$$

$$\frac{\text{Opt}_{c_w}(\text{Uitrol1A}) - \text{Opt}_{c_w}(\text{Uitrol2A})}{\text{Opt}_{c_w}(\text{Uitrol1A})} = 1.9 \%$$

Op grond van deze verhoudingen kan niet beweerd worden dat de coëfficiënten met een precisie van 2 % bepaald kunnen worden. Hiervoor zijn er te weinig A-uitrolcurves.

Merk op dat het niet zinvol is een soortgelijke verhouding voor $\text{Opt}_{\omega_0}(\text{Uitrol1A})$ en $\text{Opt}_{\omega_0}(\text{Uitrol2A})$ te berekenen. ω_0 staat immers voor de snelheid ten tijde van de eerste meting en is dus altijd proefafhankelijk.

Het ingestelde maximum aantal iteraties blijkt voldoende groot te zijn, opdat het schatteralgoritme een minimum kan vinden.

T.a.v. de waarde van c_w dient opgemerkt te worden dat de formule ingebouwd in het schatteralgoritme waar de testen mee uitgevoerd zijn een c_w aflevert die factor 2 te klein is. De c_w -waarde van de DAF wordt na correctie ongeveer 0.86. Deze waarde ligt in het interval van [0.8; 2.0] hetgeen door Kraftfahr⁽⁷⁾ opgegeven wordt als een normale waarde voor vrachtwagens. De c_w -waarde van 0.38 voor de landrover is niet geverifieerd met fabrieksgegevens.

De verhouding $\text{Opt}_{f_1} / \text{Opt}_{f_2}$ is met een orde van grootte 10 veel kleiner dan op de theoretische gronden verwachte waarde van de orde van grootte 1000. Hiervoor is geen verklaring gevonden.

De grillige A-verschilcurves wekken niet de indruk dat er belangrijke effecten zijn die door het fysische model niet beschreven worden. Het meenemen van de windsnelheid in het fysisch model is echter het overwegen waard. Dit zal vermoedelijk slechts een gering effect hebben op Opt_{Δ} , maar heeft mogelijk andere waarden voor de fysische coëfficiënten tot gevolg.

Merk op dat Warning Code 8 (= Mogelijk niet optimale minimum gevonden), afkomstig van DBCONF, niet gebruikt is om tupels af te wijzen.

10.6 GEBRUIKERSADVIEZEN

De resultaten van de testen van het schatteralgoritme leiden tot de volgende gebruikersadviezen:

- Het verdient de aanbeveling meer dan één uitrolcurve te maken met hetzelfde voertuig onder dezelfde omstandigheden.
- Er dient gecontroleerd te worden of de coëfficiënten randwaarden van het zoekgebied aannemen. Indien dit het geval is, zijn de coëfficiënten waarschijnlijk onbetrouwbaar.
- Er dient zo mogelijk gebruik gemaakt te worden van gefixeerde coëfficiënten.
- Er dienen geen verkorte uitrolcurves gebruikt te worden. Zie bijlage C.

11 CONCLUSIE


Het schatteralgoritme zoals gepresenteerd in dit document is in staat wrijvingscoëfficiënten te berekenen voor de UDB. Om tot statistische (algemene) uitspraken te komen m.b.t. tot de nauwkeurigheid van het schatteralgoritme is een veel groter aantal goede uitrolcurves noodzakelijk. De resultaten zoals door het schatteralgoritme geleverd voor de uitrolcurves Uitrol1A en Uitrol2A zijn mathematisch beschouwd heel bevredigend vanwege de in absolute zin lage norm. De overeenstemming is fysisch gezien heel hoopgevend. De berekende c_w -waarde van de DAF YA-4440 komt overeen met hetgeen volgens de literatuur verwacht mag worden. De wrijvingscoëfficiënten Opt_{f_1} en Opt_{f_2} voldoen niet helemaal aan de fysische verwachtingen. De reden hiervoor is onbekend. Of de coëfficiënten in de praktijk bevredigend zijn, kan pas na gebruik in de rijnsimulator geëvalueerd worden.

REFERENTIES

- [1] Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, by J.E. Dennis and Robert B. Schnabel. Prentice-Hall Series in Computational Mathematics.
- [2] Dictaat Numerieke Wiskunde B, Rijks Universiteit Leiden, Najaar 1984.
- [3] Dictaat Numerieke Wiskunde C, Rijks Universiteit Leiden, Januari 1985.
- [4] Differential equations and their applications, M. Braun, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin.
- [5] MATH/IMSL User's manual, version 1.0
- [6] Kraftfahr Technisches Taschenbuch, Bosch, 19^e auflage.



Groepsleider
Ir. W.G. de Jong



Projektleider
Dr. H.F.R. Arciszewski



Auteur
Drs. T.M. Dokoupil

DE METHODE VAN EULER

Een stelsel differentiaalvergelijkingen kan m.b.v. de methode van Euler^(?) numeriek benaderd worden.

Zij gegeven de volgende differentiaalvergelijking met randvoorwaarde:

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)) \\ U(t_0) = c_0 \end{cases}$$

waarbij $f \in C[\alpha, \beta] * D$ (= Verzameling continue functies op $[\alpha, \beta] * D$, en $D \subset \mathbb{R}$), $c_0 \in \mathbb{R}$. Kies stapgrootte $h > 0$ en definieer: $t_i = \alpha + n * h$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Zij N het grootste gehele getal zó dat $t_N \leq \beta$. Dan is u_n een benadering voor $U(t_n)$ met:

$$\begin{cases} u_0 = c_0 \\ u_n = u_{n-1} + h * f(t_{n-1}, u_{n-1}) \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

DE METHODE DER KLEINSTE KWADRATEN

Zij gegeven $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, 2, \dots, N\}$. Gevraagd de coëfficiënten α_1 , α_2 en α_3 van het polynoom:

$$y(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

zó dat

$$\sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i)^2$$

minimaal is.

Zij $A = \{a_{ij}\}$ een $N \times 3$ matrix, zó dat:

$$\begin{array}{ll} a_{i1} = 1 & i = 1, 2, \dots, N \\ a_{i2} = x_i & i = 1, 2, \dots, N \\ a_{i3} = x_i^2 & i = 1, 2, \dots, N \end{array}$$

Laat A^T de getransformeerde van A zijn. Dan worden de kleinste kwadraten coëfficiënten α_1 , α_2 en α_3 bepaald door het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{array}{c} (\alpha_1) \\ A^T A (\alpha_2) \\ (\alpha_3) \end{array} = A^T \begin{array}{c} (y_1) \\ (...) \\ (y_N) \end{array}$$

HET GEBRUIK VAN VERKORTE UITROLCURVES

In deze bijlage wordt ingegaan op de vraag of het mogelijk is de snelheid als functie van de tijd met een gedeelte van de uitrolcurve te beschrijven. Indien een voertuig niet hoeft te accelereren tot een hoge aanvangssnelheid of uit te rollen tot stilstand, kan namelijk volstaan worden met een kortere testweg. Dit komt de verkeersveiligheid ten goede en vergroot het aantal geschikte testwegen. Geschikte testwegen voor het maken van uitrolcurves van zware voertuigen zijn schaars aangezien deze zo'n 2 km lang en recht dienen zijn.

Helaas blijkt het niet mogelijk te zijn om de uitrolcurves te verkorten. Daartoe een voorbeeld.

In figuur 6 zijn twee polylijnen goed te onderscheiden. Als verkorte uitrolcurve is uitrolcurve 1A genomen, met uitsluitend die metingen waarvan de gemeten snelheden in het interval [30 km / h, 70 km / h] liggen. De naar boven afbuigende resultaatpolylijn in figuur 6 is berekend met de coëfficiënten die optimaal zijn t.o.v. van de verkorte uitrolcurve. De andere polylijn is de origineelpolylijn van uitrolcurve 1A met een snelheidsbereik van 0 tot 70 km / h.

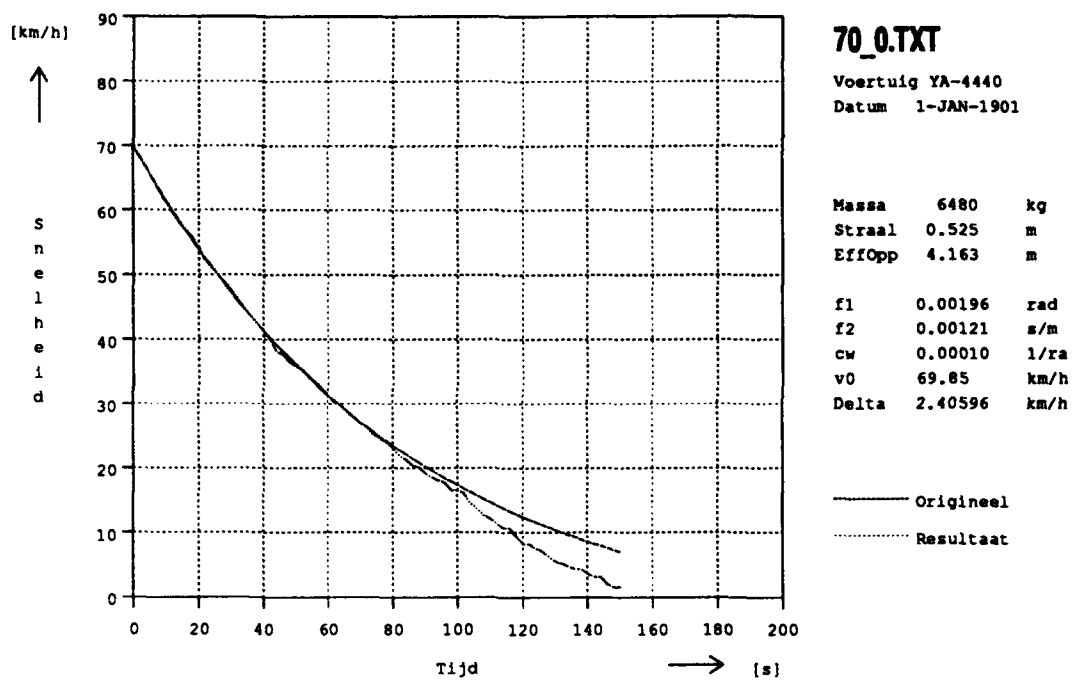


Fig. 6. Verkorte 1A-uitrolcurve.

Uit de grafiek volgt dat de coëfficiënten berekend met een verkorte uitrolcurve niet de gehele uitrolcurve beschrijven, hoewel ze wel een goede fit leveren op het beperkte stuk.

UNCLASSIFIED

REPORT DOCUMENTATION PAGE

(MOD-NL)

1. DEFENSE REPORT NUMBER (MOD-NL) TD91-3267	2. RECIPIENT'S ACCESSION NUMBER	3. PERFORMING ORGANIZATION REPORT NUMBER FEL-91-B292
4. PROJECT/TASK/WORK UNIT NO. 22546	5. CONTRACT NUMBER A81KL131	6. REPORT DATE AUGUST 1991
7. NUMBER OF PAGES 59 (INCL. APPEND., EXCL. RDP & DIST. LIST)	8. NUMBER OF REFERENCES 6	9. TYPE OF REPORT AND DATES COVERED FINAL REPORT
10. TITLE AND SUBTITLE ONDERZOEK NAAR DE BEPALING VAN WRIJVINGSCOEFFICIENTEN VAN EEN VOERTUIG UIT UITROLCURVES (RESEARCH INTO THE DETERMINATION OF FRICTION COEFFICIENTS OF A VEHICLE FROM DECELERATION CURVES)		
11. AUTHOR(S) T.M. DOKOUPIL		
12. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES) TNO PHYSICS AND ELECTRONICS LABORATORY, P.O. BOX 96864, 2509 JG THE HAGUE OUDE WAALSDORPERWEG 63, THE HAGUE, THE NETHERLANDS		
13. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) NETHERLANDS MINISTRY OF DEFENCE		
14. SUPPLEMENTARY NOTES THE PHYSICS AND ELECTRONICS LABORATORY IS PART OF THE NETHERLANDS ORGANIZATION FOR APPLIED SCIENTIFIC RESEARCH		
15. ABSTRACT (MAXIMUM 200 WORDS, 1044 POSITIONS) FOR SIMULATING A DRIVE OF A VEHICLE ON THE UNIVERSELE DYNAMOMETERBANK SO CALLED K-FACTORS HAVE TO BE SET. THESE K-FACTORS CORRESPOND WITH FRICTION COEFFICIENTS OF THE VEHICLE TO BE SIMULATED. THIS DOCUMENT DESCRIBES THE MATHEMATICAL PROBLEMS INVOLVED IN THE DETERMINATION OF THE K-FACTORS FROM A DECELERATION CURVE. THE DETERMINATION OF THE K-FACTORS IS IN FACT THE ESTIMATION OF PARAMETERS OF A DIFFERENTIAL EQUATION.		
16. DESCRIPTORS FRICTION COEFFICIENT NUMERICAL APPROXIMATION VEHICLE RESEARCH VEHICLE RESISTANCE TO MOTION DIFFERENTIAL EQUATIONS		IDENTIFIERS VEHICLE FRICTION COEFFICIENTS VEHICLE DECELERATION CURVE
17a. SECURITY CLASSIFICATION (OF REPORT) UNCLASSIFIED	17b. SECURITY CLASSIFICATION (OF PAGE) UNCLASSIFIED	17c. SECURITY CLASSIFICATION (OF ABSTRACT) UNCLASSIFIED
18. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT UNLIMITED		17d. SECURITY CLASSIFICATION (OF TITLES) UNCLASSIFIED

UNCLASSIFIED